

## Corrigé — Centres Étrangers 2025 J2 – Exercice 4

**Thème :** Géométrie dans l'espace — Plans, droites, coplanarité

**Barème indicatif :** 4 points

---

On se place dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points :

$$A(1; 0; 3), \quad B(-2; 1; 2), \quad C(0; 3; 2),$$

et les plans :

- $\mathcal{P}$  d'équation  $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ ,
  - $\mathcal{P}'$  d'équation  $x - y - z + 2 = 0$ .
- 

### Question 1 — Équation du plan $(ABC)$

**1a. Les points  $A, B, C$  sont-ils alignés ?**

On calcule les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3; 1; -1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-1; 3; -1).$$

Le produit vectoriel  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(1 \times (-1) - (-1) \times 3) - \vec{j}((-3)(-1) - (-1)(-1)) + \vec{k}((-3)(3) - 1 \times (-1)) \\ &= \vec{i}(-1 + 3) - \vec{j}(3 - 1) + \vec{k}(-9 + 1) \\ &= (2; -2; -8) = 2(1; -1; -4). \end{aligned}$$

Comme  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ , les points  $A, B, C$  **ne sont pas alignés** : ils définissent bien un plan unique.

**1b. Vecteur normal au plan  $(ABC)$**

Un vecteur normal est  $\vec{n} = (1; -1; -4)$  (ou  $(2; -2; -8)$ , proportionnel).

*Vérification de l'orthogonalité :*

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = (1)(-3) + (-1)(1) + (-4)(-1) = -3 - 1 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = (1)(-1) + (-1)(3) + (-4)(-1) = -1 - 3 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

**1c. Équation cartésienne du plan (ABC)**

Le plan passe par  $A(1; 0; 3)$  et a pour normale  $\vec{n} = (1; -1; -4)$  :

$$\begin{aligned} 1(x - 1) + (-1)(y - 0) + (-4)(z - 3) &= 0 \\ x - 1 - y - 4z + 12 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x - y - 4z + 11 = 0.}$$

Vérification avec  $B(-2; 1; 2)$  :  $-2 - 1 - 8 + 11 = 0 \checkmark$ .

Vérification avec  $C(0; 3; 2)$  :  $0 - 3 - 8 + 11 = 0 \checkmark$ .

---

**Question 2 — Position relative des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$**

Les vecteurs normaux sont :

$$\vec{n}_{\mathcal{P}} = (3; -3; 2) \quad \text{et} \quad \vec{n}_{\mathcal{P}'} = (1; -1; -1).$$

**2a. Les plans sont-ils sécants ?**

Vérifions si les normales sont proportionnelles :

$$\frac{3}{1} = 3, \quad \frac{-3}{-1} = 3, \quad \frac{2}{-1} = -2.$$

Les rapports ne sont pas tous égaux ( $3 \neq -2$ ), donc les normales **ne sont pas colinéaires** : les plans ne sont pas parallèles. **Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont sécants.**

**2b. Les plans sont-ils perpendiculaires ?**

$$\vec{n}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{n}_{\mathcal{P}'} = 3 \times 1 + (-3)(-1) + 2 \times (-1) = 3 + 3 - 2 = 4 \neq 0.$$

Les normales ne sont pas perpendiculaires, donc **les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  ne sont pas perpendiculaires.**

---

**Question 3 — Droite d'intersection**  $(d) = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$

**Direction de**  $(d)$

Un vecteur directeur de  $(d)$  est le produit vectoriel des normales :

$$\vec{u} = \vec{n}_{\mathcal{P}} \wedge \vec{n}_{\mathcal{P}'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}((-3)(-1) - 2(-1)) - \vec{j}(3(-1) - 2 \times 1) + \vec{k}(3(-1) - (-3)(1))$$

$$= \vec{i}(3 + 2) - \vec{j}(-3 - 2) + \vec{k}(-3 + 3)$$

$$= (5; 5; 0) = 5(1; 1; 0).$$

Un vecteur directeur de  $(d)$  est  $\vec{u} = (1; 1; 0)$ .

---

**Question 4 — Représentation paramétrique de**  $(d)$

**Point de**  $(d)$

On cherche un point  $M(x_0; y_0; z_0)$  appartenant à la fois à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ . On vérifie que  $M(2; 1; 3)$  convient :

— Dans  $\mathcal{P}$  :  $3(2) - 3(1) + 2(3) - 9 = 6 - 3 + 6 - 9 = 0 \checkmark$

— Dans  $\mathcal{P}'$  :  $2 - 1 - 3 + 2 = 0 \checkmark$

Le point  $M(2; 1; 3)$  appartient à  $(d)$ .

**Représentation paramétrique**

$$(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

**Question 5 — Les trois plans**  $(ABC)$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}'$  **ont-ils la droite**  $(d)$  **en commun ?**

On vérifie que tout point de  $(d)$  appartient au plan  $(ABC)$  d'équation  $x - y - 4z + 11 = 0$ .

Pour un point générique de  $(d)$  de coordonnées  $(2 + t; 1 + t; 3)$  :

$$(2 + t) - (1 + t) - 4(3) + 11 = 2 + t - 1 - t - 12 + 11 = 0. \quad \checkmark$$

L'égalité est vraie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , donc **tous les points de**  $(d)$  **appartiennent au plan**  $(ABC)$ .

**Conclusion :** La droite  $(d) = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$  est entièrement contenue dans le plan  $(ABC)$ . Les trois plans  $(ABC)$ ,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  ont la droite  $(d)$  en commun : ils partagent une droite d'intersection commune. On dit que les trois plans sont **coaxiaux** (ou coplanaires relativement à leur intersection).