Corrigé — Centres Étrangers 2025 J2 – Exercice 3

Thème : Encodage Base64 — Combinatoire et loi binomiale

Barème indicatif : 4 points

L'encodage Base64 utilise un alphabet de **64 caractères** : 26 lettres majuscules, 26 lettres minuscules, 10 chiffres et 2 caractères spéciaux.

Partie A — Dénombrement de séquences de 4 caractères

Question 1. Séquences ordonnées de 4 caractères avec répétition autorisée

Chaque position peut être occupée par l'un des 64 caractères, indépendamment des autres. Le nombre de séquences est :

$$64^4 = (2^6)^4 = 2^{24} = \mathbf{16\,777\,216}.$$

Question 2. Séquences de 4 caractères tous distincts

On choisit les 4 caractères l'un après l'autre sans remise. Le nombre d'arrangements est :

$$A_{64}^4 = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = \mathbf{14\,776\,336}.$$

Question 3a. Séquences ne contenant pas la lettre A majuscule

Il reste $64 - 1 = 63$ caractères disponibles à chaque position :

$$63^4 = \mathbf{15\,752\,961}.$$

Question 3b. Séquences contenant au moins une lettre A majuscule

On utilise le complémentaire :

$$64^4 - 63^4 = 16\,777\,216 - 15\,752\,961 = \mathbf{1\,024\,255}.$$

Question 3c. Séquences contenant exactement une lettre A majuscule

On choisit : 1. la **position** de la lettre A parmi les 4 : $\binom{4}{1} = 4$ façons, 2. les **3 autres caractères**, chacun parmi les 63 caractères restants (sans A) : $63^3 = 250\,047$ façons.

$$\binom{4}{1} \times 1 \times 63^3 = 4 \times 250\,047 = \mathbf{1\,000\,188}.$$

Question 3d. Séquences contenant exactement deux lettres A majuscules

On choisit : 1. les **2 positions** occupées par A parmi les 4 : $\binom{4}{2} = 6$ façons, 2. les **2 autres caractères**, chacun parmi les 63 caractères non-A : $63^2 = 3\,969$ façons.

$$\binom{4}{2} \times 63^2 = 6 \times 3\,969 = \mathbf{23\,814}.$$

Partie B — Loi binomiale

Un système de vérification analyse $n = 250$ séquences de façon indépendante. La probabilité qu'une séquence contienne au moins un A majuscule est, d'après la question 3b :

$$p = \frac{1\,024\,255}{16\,777\,216} \approx 0{,}0610 \approx 0{,}01.$$

(Le problème indique $p = 0{,}01$ comme approximation ; on l'utilise dans la suite.)

On note X le nombre de séquences contenant au moins un A parmi les 250.

Question 1. Loi de X

Les vérifications sont indépendantes, la probabilité de succès est constante $p = 0{,}01$:

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(250\,;\,0{,}01).}$$

Question 2. Probabilité $P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \binom{250}{0} \times (0{,}01)^0 \times (0{,}99)^{250} = (0{,}99)^{250}.$$

Calcul :

$$(0{,}99)^{250} = e^{250\,\ln(0{,}99)} \approx e^{250\times(-0{,}01005)} = e^{-2{,}513} \approx \mathbf{0{,}081}.$$

Question 3. $P(X > 16)$

L'espérance et l'écart-type de X sont :

$$E(X) = np = 250 \times 0{,}01 = 2{,}5.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{250 \times 0{,}01 \times 0{,}99} = \sqrt{2{,}475} \approx 1{,}57.$$

$X > 16$ correspond à $X > E(X) + \dfrac{16 - 2{,}5}{1{,}57} \approx E(X) + 8{,}6\,\sigma(X)$.

Cette valeur est extrêmement éloignée de l'espérance (plus de 8 écarts-types). Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(X > 16) \leq P(|X - 2{,}5| \geq 13{,}5) \leq \frac{V(X)}{(13{,}5)^2} = \frac{2{,}475}{182{,}25} \approx 0{,}014.$$

En pratique, avec un calcul exact par la loi binomiale, cette probabilité est **inférieure à** 10^{-6}, c'est-à-dire **quasi nulle**.

Partie C — Somme de quatre variables binomiales indépendantes

On dispose de quatre variables X_1, X_2, X_3, X_4 indépendantes, toutes distribuées selon $\mathcal{B}(250\,;\,0{,}01)$. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Espérance de S

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 \times 2{,}5 = \mathbf{10}.$$

Variance de S (les X_i sont indépendantes)

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) = 4 \times 250 \times 0{,}01 \times 0{,}99 = 4 \times 2{,}475 = \mathbf{9{,}9}.$$

En moyenne, parmi les $4 \times 250 = 1000$ séquences analysées au total, on s'attend à trouver **10 séquences** contenant au moins un A majuscule, avec un écart-type de $\sqrt{9{,}9} \approx 3{,}15$.