

Corrigé — Centres Étrangers 2025 J2 – Exercice 2

Thème : Fonction sigmoïde — Étude analytique, primitive et valeur moyenne

Barème indicatif : 5 points

On considère la famille de fonctions $f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$ où $a, b > 0$. La courbe passe par les points $A(0; 0,5)$ et $B(10; 1)$.

Partie A — Détermination des paramètres a et b

Question 1. Lecture graphique

D'après le graphique, $f(10) \approx 1$. On admet $f(10) = 1$.

Question 2. Asymptote horizontale

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-bx} \rightarrow 0$ (car $b > 0$), donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{a + 0} = \frac{1}{a}.$$

La droite d'équation $y = \frac{1}{a}$ est une **asymptote horizontale** en $+\infty$.

D'après la lecture graphique, cette asymptote est $y = 1$, donc $\frac{1}{a} = 1$.

Question 3. Valeur de a

La courbe passe par $A(0; 0,5)$:

$$f(0) = \frac{1}{a + e^0} = \frac{1}{a + 1} = 0,5 \implies a + 1 = 2 \implies \boxed{a = 1}.$$

On vérifie la cohérence : $\frac{1}{a} = 1 \checkmark$.

Question 4. Coefficient directeur de la droite (AB)

$$\text{pente}_{AB} = \frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = \frac{1 - 0,5}{10} = \frac{0,5}{10} = 0,05.$$

Question 5a. Dérivée de f avec $a = 1$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}} = \left(1 + e^{-bx}\right)^{-1}.$$

Par dérivation de la composée :

$$f'(x) = -\left(1 + e^{-bx}\right)^{-2} \times (-b e^{-bx}) = \frac{b e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$$

Question 5b. Valeur de b

La tangente en A a pour pente $f'(0)$:

$$f'(0) = \frac{b e^0}{(1 + e^0)^2} = \frac{b}{(1 + 1)^2} = \frac{b}{4}.$$

Cette pente doit être égale au coefficient directeur de (AB) (la tangente en A est la droite (AB)) :

$$\frac{b}{4} = 0,05 \implies \boxed{b = 0,2.}$$

Partie B — Étude de $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$

Question 1. Limite en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

La droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Question 2. Stricte monotonie de f

$$f'(x) = \frac{0,2 e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2}.$$

Le numérateur $0,2 e^{-0,2x} > 0$ et le dénominateur $(1 + e^{-0,2x})^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Question 3. Existence et unicité de α tel que $f(\alpha) = 0,97$

f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus :

$$f(0) = \frac{1}{2} = 0,5 < 0,97 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 > 0,97.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0,97$.

Question 4. Encadrement de α à l'unité

On évalue f en quelques points :

$$f(17) = \frac{1}{1 + e^{-3,4}} \approx \frac{1}{1 + 0,0334} \approx \frac{1}{1,0334} \approx 0,967 < 0,97.$$

$$f(18) = \frac{1}{1 + e^{-3,6}} \approx \frac{1}{1 + 0,0273} \approx \frac{1}{1,0273} \approx 0,973 > 0,97.$$

Comme $f(17) < 0,97 < f(18)$ et f est strictement croissante :

$$\boxed{17 \leq \alpha \leq 18.}$$

Partie C — Primitive et valeur moyenne

Question 1. Réécriture de $f(x)$

On multiplie numérateur et dénominateur par $e^{0,2x}$:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} \times \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}} = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}. \quad \checkmark$$

Question 2. Primitive de f

On reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{0,2x} + 1$ et $u'(x) = 0,2 e^{0,2x}$.

$$f(x) = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1} = \frac{1}{0,2} \times \frac{0,2 e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1} = 5 \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Une primitive de f est donc :

$$\boxed{F(x) = 5 \ln(1 + e^{0,2x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Vérification : $F'(x) = 5 \times \frac{0,2 e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}} = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}} = f(x) \checkmark.$

Question 3. Valeur moyenne de f sur $[0; 40]$

La valeur moyenne de f sur $[0; 40]$ est :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{40} \int_0^{40} f(x) dx = \frac{1}{40} \left[5 \ln(1 + e^{0,2x}) \right]_0^{40} \\ &= \frac{1}{40} \left[5 \ln(1 + e^8) - 5 \ln(1 + e^0) \right] = \frac{5}{40} \left[\ln(1 + e^8) - \ln(2) \right] \\ &= \frac{1}{8} \ln \left(\frac{1 + e^8}{2} \right). \end{aligned}$$

Valeur exacte :

$$\mu = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{1 + e^8}{2}\right).$$

Valeur approchée : $e^8 \approx 2980,96$, donc $\frac{1 + e^8}{2} \approx 1490,98$.

$$\mu \approx \frac{\ln(1490,98)}{8} \approx \frac{7,308}{8} \approx \mathbf{0,914}.$$