

Corrigé — Amérique du Nord 2025 J1 – Exercice 4

Thème : Fonctions — Équations différentielles, intégration par parties, convexité, étude de fonction

Partie A — Lecture graphique

Question. Identifier les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 parmi les représentations de g et g' .

Analyse :

- \mathcal{C}_1 coupe l'axe des ordonnées en $(0; 1)$, donc la fonction associée vérifie $f(0) = 1$.
- \mathcal{C}_2 coupe l'axe des ordonnées en $(0; 2)$ et s'annule en $x = -2$ et $x = 1$.

La dérivée g' s'annule aux extrema de g . La courbe \mathcal{C}_2 s'annule en deux points et coupe l'axe Oy en une valeur non nulle : c'est compatible avec le comportement d'une dérivée. Donc :

- \mathcal{C}_2 est la courbe de g' (elle s'annule aux extrema de g).
- \mathcal{C}_1 est la courbe de g .

Équation de la tangente à \mathcal{C}_1 en $x = 0$:

$$g(0) = 1 \quad (\text{lecture sur } \mathcal{C}_1) \quad g'(0) = 2 \quad (\text{lecture sur } \mathcal{C}_2)$$

L'équation de la tangente en $x = 0$ est :

$$y = g(0) + g'(0)(x - 0) = 1 + 2x$$

$$\boxed{y = 2x + 1}$$

Partie B — Équation différentielle (E) : $y' + y = (2x + 3)e^{-x}$

Question 1. Vérifier que $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est solution de (E).

On calcule $f_0'(x)$ en appliquant la règle de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= (x^2 + 3x)' \cdot e^{-x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-x})' \\ &= (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)(-e^{-x}) \\ &= [(2x + 3) - (x^2 + 3x)]e^{-x} \\ &= (-x^2 - x + 3)e^{-x} \end{aligned}$$

On vérifie que f_0 satisfait (E), c'est-à-dire $f'_0 + f_0 = (2x + 3)e^{-x}$:

$$\begin{aligned}f'_0(x) + f_0(x) &= (-x^2 - x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x} \\ &= [(-x^2 - x + 3) + (x^2 + 3x)]e^{-x} \\ &= (2x + 3)e^{-x} \checkmark\end{aligned}$$

f_0 est bien une solution particulière de (E).

Question 2. Résoudre l'équation homogène associée $y' + y = 0$.

L'équation homogène $y' + y = 0$ s'écrit $y' = -y$, soit $y' + 1 \cdot y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 1$.

Toutes les solutions sont de la forme :

$$y = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Question 3. Donner la solution générale de (E).

La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est la somme d'une solution particulière f_0 et de la solution générale de l'équation homogène :

$$y = f_0(x) + Ce^{-x} = (x^2 + 3x)e^{-x} + Ce^{-x} = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$$

$$y(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Question 4. Trouver la solution g de (E) dont la courbe passe par le point $(0; 1)$.

On sait que $g(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$. La condition $g(0) = 1$ donne :

$$g(0) = (0 + 0 + C)e^0 = C = 1$$

$$g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$$

Vérification de cohérence avec la Partie A : $g(0) = 1$ (conforme à la lecture sur \mathcal{C}_1) et $g'(0) = (-x^2 - x + 3 - 1)e^{-x}|_{x=0} = (-0 - 0 + 3 - 1) \times 1 = 2$ (conforme à \mathcal{C}_2). Tout est cohérent.

Question 5. Pour quelle(s) valeur(s) de C la courbe de $(x^2 + 3x + C)e^{-x}$ présente-t-elle deux points d'inflexion ?

Notons $h_C(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$.

On calcule $h_C''(x)$:

Première dérivée :

$$h_C'(x) = (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + C)e^{-x} = [-(x^2 + x) + 3 - C]e^{-x} = (-x^2 - x + 3 - C)e^{-x}$$

Deuxième dérivée :

$$h_C''(x) = (-2x - 1)e^{-x} - (-x^2 - x + 3 - C)e^{-x} = [(-2x - 1) + (x^2 + x - 3 + C)]e^{-x}$$

$$h_C''(x) = (x^2 - x - 4 + C)e^{-x}$$

Les points d'inflexion sont aux zéros de h_C'' , c'est-à-dire aux solutions de :

$$x^2 - x - 4 + C = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré en x . Elle admet **deux solutions distinctes** si et seulement si son discriminant est **strictement positif** :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4 + C) = 1 + 16 - 4C = 17 - 4C > 0$$

$$\iff C < \frac{17}{4}$$

h_C présente deux points d'inflexion distincts si et seulement si $C < \frac{17}{4}$

Partie C — Étude de $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

On remarque que $f(x) = h_C(x)$ avec $C = 2$, c'est-à-dire $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

On peut factoriser : $f(x) = (x + 1)(x + 2)e^{-x}$.

Question 1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Par le théorème des **croissances comparées**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-x} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

Question 2a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.

On dérive par la règle du produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 3x + 2)'e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(e^{-x})' \\ &= (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 2)e^{-x} \\ &= [(2x + 3) - (x^2 + 3x + 2)]e^{-x} \\ &= (-x^2 - x + 1)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}}$$

Question 2b. Dresser le tableau de variations de f .

On étudie le signe de $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x , le signe de f' est celui de $-x^2 - x + 1$.

On résout $-x^2 - x + 1 = 0$, soit $x^2 + x - 1 = 0$:

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$- x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,618$$

$$- x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618$$

Comme le coefficient de x^2 dans $-x^2 - x + 1$ est négatif, le trinôme est **positif entre les racines** :

Intervalle	$f'(x)$	f
$x < x_1$	-	décroissante
$x = x_1$	0	minimum local
$x_1 < x < x_2$	+	croissante
$x = x_2$	0	maximum local
$x > x_2$	-	décroissante

Valeurs remarquables :

$$f(x_1) = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} + 2 \right) e^{-x_1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot e^{-x_1}$$

$$f(x_2) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot e^{-x_2}$$

Question 3. Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Pour $x \geq 0$, on a $x + 1 \geq 1 > 0$ et $x + 2 \geq 2 > 0$. De plus, $e^{-x} > 0$. Donc :

$$f(x) = \underbrace{(x+1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x+2)}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} \geq 0$$

$$\boxed{f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0; +\infty[}$$

Question 4. Calculer l'aire $A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$ pour $\alpha > 0$.

On cherche une primitive F de $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

On utilise une **intégration par parties successive**. On sait que si $G(x) = -(ax^2 + bx + c)e^{-x}$, alors :

$$G'(x) = -(2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (ax^2 + (b - 2a)x + (c - b))e^{-x}$$

On cherche a, b, c tels que $G'(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 3 \implies b = 5 \\ c - b = 2 \implies c = 7 \end{cases}$$

Donc $F(x) = -(x^2 + 5x + 7)e^{-x}$ est une primitive de f .

Vérification :

$$F'(x) = -(2x+5)e^{-x} + (x^2+5x+7)e^{-x} = [-(2x+5) + (x^2+5x+7)]e^{-x} = (x^2+3x+2)e^{-x} = f(x) \checkmark$$

Calcul de $A(\alpha)$:

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = [F(x)]_0^\alpha = F(\alpha) - F(0)$$

$$F(0) = -(0 + 0 + 7)e^0 = -7$$

$$A(\alpha) = -(\alpha^2 + 5\alpha + 7)e^{-\alpha} - (-7) = 7 - (\alpha^2 + 5\alpha + 7)e^{-\alpha}$$

$$\boxed{A(\alpha) = 7 - (\alpha^2 + 5\alpha + 7)e^{-\alpha}}$$

Vérification de cohérence : Quand $\alpha \rightarrow +\infty$, $(\alpha^2 + 5\alpha + 7)e^{-\alpha} \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $A(\alpha) \rightarrow 7$. L'aire totale sous \mathcal{C}_f sur $[0; +\infty[$ est 7 unités d'aire.