Corrigé — Amérique du Nord 2025 J1 – Exercice 3

Thème : Géométrie dans l'espace — Droites, plans, projections, angles

---

On travaille dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Données : - Droite (d) : $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, de vecteur directeur $\vec{u} = (-2\,;\,0\,;\,-6)$ (proportionnel à $(1\,;\,0\,;\,3)$), passant par $M_0(3\,;\,-1\,;\,2)$. - Points $A(3\,;\,-3\,;\,-2)$, $B(5\,;\,-4\,;\,-1)$. - Plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3z - 7 = 0$, de vecteur normal $\vec{n} = (1\,;\,0\,;\,3)$.

Détermination du point C : C est le point de (d) d'abscisse 2.

$$3 - 2t = 2 \implies t = \frac{1}{2} \implies C(2\,;\,-1\,;\,-1)$$

Affirmation 1

Énoncé : La droite (d) et l'axe des ordonnées ne sont pas coplanaires.

Analyse : Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes. On peut aussi utiliser le critère du déterminant : deux droites D_1 (passant par P_1 de vecteur directeur $\vec{v}_1$) et D_2 (passant par P_2 de vecteur directeur $\vec{v}_2$) sont coplanaires si et seulement si le déterminant $\det(\overrightarrow{P_1P_2},\, \vec{v}_1,\, \vec{v}_2) = 0$.

- (d) passe par $M_0(3\,;\,-1\,;\,2)$ avec $\vec{v}_1 = (-2\,;\,0\,;\,-6)$.
- L'axe des ordonnées passe par $O(0\,;\,0\,;\,0)$ avec $\vec{v}_2 = (0\,;\,1\,;\,0)$.
- $\overrightarrow{OM_0} = (3\,;\,-1\,;\,2)$.

On calcule le déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{OM_0},\, \vec{v}_1,\, \vec{v}_2\right) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

Développement selon la troisième colonne :

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (3 \times (-6) - (-2) \times 2) = -1 \cdot (-18 + 4) = -1 \times (-14) = 14 \neq 0$$

Le déterminant est non nul, donc les deux droites **ne sont pas coplanaires**.

$$\boxed{\textbf{Affirmation 1 : VRAIE}}$$

Affirmation 2

Énoncé : Le plan passant par A et orthogonal à (d) a pour équation $x + 3z + 3 = 0$.

Analyse : Un plan orthogonal à (d) admet le vecteur directeur de (d) comme vecteur normal. Le vecteur directeur de (d) est $\vec{u} = (-2\,;\,0\,;\,-6)$, proportionnel à $\vec{n} = (1\,;\,0\,;\,3)$.

Le plan passant par $A(3\,;\,-3\,;\,-2)$ de vecteur normal $(1\,;\,0\,;\,3)$ a pour équation :

$$1 \cdot (x-3) + 0 \cdot (y+3) + 3 \cdot (z+2) = 0$$

$$x - 3 + 3z + 6 = 0$$

$$x + 3z + 3 = 0$$

$$\boxed{\textbf{Affirmation 2 : VRAIE}}$$

Affirmation 3

Énoncé : L'angle $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$.

Analyse : On calcule les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis le cosinus de l'angle.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5-3\,;\,-4-(-3)\,;\,-1-(-2)) = (2\,;\,-1\,;\,1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2-3\,;\,-1-(-3)\,;\,-1-(-2)) = (-1\,;\,2\,;\,1)$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -2 - 2 + 1 = -3$$

Normes :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

Cosinus de l'angle :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Donc $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ (soit 120ř), et non $\frac{\pi}{6}$ (qui vaut 30ř).

$$\boxed{\textbf{Affirmation 3 : FAUSSE} \quad \left(\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}\right)}$$

Affirmation 4

Énoncé : La distance $BH = \frac{\sqrt{10}}{2}$, où H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.

Analyse : Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x + 3z - 7 = 0$ et pour vecteur normal $\vec{n} = (1\,;\,0\,;\,3)$.

La droite passant par $B(5\,;\,-4\,;\,-1)$ et orthogonale à $\mathcal{P}$ est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

On cherche t tel que ce point appartienne à $\mathcal{P}$:

$$(5 + t) + 3(-1 + 3t) - 7 = 0$$

$$5 + t - 3 + 9t - 7 = 0$$

$$10t - 5 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Donc $H = \left(5 + \frac{1}{2}\,;\,-4\,;\,-1 + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}\,;\,-4\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Calcul de la distance BH :

$$BH = |t| \cdot \|\vec{n}\| = \frac{1}{2} \times \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Vérification directe :

$$\overrightarrow{BH} = H - B = \left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{3}{2}\right)$$

$$BH = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \checkmark$$

$$\boxed{\textbf{Affirmation 4 : VRAIE} \quad \left(BH = \frac{\sqrt{10}}{2}\right)}$$

Récapitulatif

Affirmation	Résultat
1. (d) et axe des ordonnées non coplanaires	**VRAIE**
2. Plan par A orthogonal à (d) : $x + 3z + 3 = 0$	**VRAIE**
3. $\widehat{BAC} = \pi/6$	**FAUSSE** (l'angle vaut $2\pi/3$)
4. $BH = \sqrt{10}/2$	**VRAIE**