Corrigé — Amérique du Nord 2025 J1 – Exercice 2

Thème : Suites — Suite récurrente, suite auxiliaire géométrique, convergence

---

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 1. Calculer u_1.

$$u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{5}{4}}$$

Question 2a. Calculer a_0 et a_1.

$$a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{5/4}{5/4 - 1} = \frac{5/4}{1/4} = 5$$

$$\boxed{a_0 = 2 \quad \text{et} \quad a_1 = 5}$$

Question 2b. Montrer que $a_{n+1} = 3a_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule a_{n+1} en substituant l'expression de u_{n+1} :

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1}$$

On simplifie le dénominateur :

$$\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{2u_n + 1 - (u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

Donc :

$$a_{n+1} = \frac{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

D'autre part, calculons $3a_n - 1$:

$$3a_n - 1 = 3 \cdot \frac{u_n}{u_n - 1} - 1 = \frac{3u_n - (u_n - 1)}{u_n - 1} = \frac{3u_n - u_n + 1}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

On obtient bien :

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1} = 3a_n - 1}$$

Question 2c. Montrer par récurrence que $a_n \geq 3n - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $a_1 = 5$ et $3 \times 1 - 1 = 2$. Comme $5 \geq 2$, la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que $a_n \geq 3n - 1$ pour un certain $n \geq 1$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $a_{n+1} \geq 3(n + 1) - 1 = 3n + 2$.

D'après la relation établie en 2b :

$$a_{n+1} = 3a_n - 1$$

Par hypothèse de récurrence, $a_n \geq 3n - 1$, donc :

$$a_{n+1} = 3a_n - 1 \geq 3(3n - 1) - 1 = 9n - 3 - 1 = 9n - 4$$

Il suffit de vérifier que $9n - 4 \geq 3n + 2$, ce qui équivaut à :

$$6n \geq 6 \iff n \geq 1$$

Cette inégalité est vérifiée pour tout $n \geq 1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $a_n \geq 3n - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Question 2d. Déterminer la limite de (a_n).

D'après la question 2c, pour tout $n \geq 1$:

$$a_n \geq 3n - 1$$

Or $\lim_{n \to +\infty}(3n - 1) = +\infty$, donc par le **théorème des gendarmes** (minorant tendant vers $+\infty$) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$$

Question 3a. Exprimer u_n en fonction de a_n.

On part de la définition $a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ et on résout en u_n :

$$a_n(u_n - 1) = u_n$$

$$a_n \cdot u_n - a_n = u_n$$

$$a_n \cdot u_n - u_n = a_n$$

$$u_n(a_n - 1) = a_n$$

$$\boxed{u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}}$$

Cette expression est bien définie pour tout $n \geq 1$ car $a_n \geq 3n - 1 \geq 2 > 1$.

Question 3b. Déterminer la limite de (u_n).

On réécrit u_n en faisant apparaître $\dfrac{1}{a_n}$:

$$u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}}$$

D'après la question 2d, $a_n \to +\infty$, donc $\dfrac{1}{a_n} \to 0$.

Par continuité des opérations algébriques :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

Question 4. Analyse de l'algorithme Python.

L'algorithme considéré est du type :

```python
def algo(p):
    n = 1
    u = 5/4    # valeur de u_1
    while u - 1 > p:
        u = (2*u + 1) / (u + 2)
        n = n + 1
    return n, u
```

Interprétation : La fonction `algo(p)` retourne le **premier rang** n à partir duquel $u_n - 1 \leq p$, ainsi que la valeur correspondante u_n.

Pour $p = 0{,}001$ **:** On utilise la formule $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$ pour calculer $u_n - 1 = \dfrac{1}{a_n - 1}$.

Calculons les premières valeurs de la suite :

n	u_n	$u_n - 1$
0	2	1
1	$5/4 = 1{,}250$	0,250
2	$\frac{2\times5/4+1}{5/4+2} = \frac{7/2}{13/4} = \frac{14}{13} \approx 1{,}0769$	0,0769
3	$\frac{2\times14/13+1}{14/13+2} = \frac{41/13}{40/13} = \frac{41}{40} = 1{,}025$	0,025
4	$\frac{2\times41/40+1}{41/40+2} = \frac{122/40}{121/40} = \frac{122}{121} \approx 1{,}00826$	0,00826
5	$\frac{2\times122/121+1}{122/121+2} = \frac{365/121}{364/121} = \frac{365}{364} \approx 1{,}00275$	0,00275
6	$\frac{2\times365/364+1}{365/364+2} = \frac{1094/364}{1093/364} = \frac{1094}{1093} \approx 1{,}000915$	0,000915

Au rang $n = 6$, on a $u_6 - 1 \approx 0{,}000915 < 0{,}001$.

La fonction `algo(0.001)` renvoie $(6,\ 1094/1093)$**.**

L'algorithme calcule donc le rang à partir duquel la suite u_n est dans un voisinage de 1 de rayon p. Pour $p = 0{,}001$, il faut $n = 6$ itérations.