Corrigé — Amérique du Nord 2025 J1 – Exercice 1

Thème : Probabilités — Probabilités conditionnelles, loi binomiale, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

---

Partie A

Question 1. Compléter l'arbre pondéré.

L'arbre des probabilités se construit avec les données de l'énoncé :

— Le serveur A est choisi avec probabilité $P(A) = 0{,}25$, le serveur B avec $P(B) = 0{,}15$, le serveur C avec $P(C) = 1 - 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}60$.
— Les probabilités conditionnelles de stabilité sont : $P(S \mid A) = 0{,}90$, $P(S \mid B) = 0{,}80$, $P(S \mid C) = 0{,}85$.
— Par complémentarité : $P(\bar{S} \mid A) = 0{,}10$, $P(\bar{S} \mid B) = 0{,}20$, $P(\bar{S} \mid C) = 0{,}15$.

L'arbre pondéré complet est donc :

$$\begin{array}{ll} A\ (0{,}25) & \begin{cases} S & (0{,}90) \\ \bar{S} & (0{,}10) \end{cases} \\ B\ (0{,}15) & \begin{cases} S & (0{,}80) \\ \bar{S} & (0{,}20) \end{cases} \\ C\ (0{,}60) & \begin{cases} S & (0{,}85) \\ \bar{S} & (0{,}15) \end{cases} \end{array}$$

Question 2. Calculer $P(B \cap S)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$P(B \cap S) = P(B) \times P(S \mid B) = 0{,}15 \times 0{,}80 = \mathbf{0{,}12}$$

Question 3. Calculer $P(C \cap \bar{S})$ et interpréter.

$$P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P(\bar{S} \mid C) = 0{,}60 \times 0{,}15 = \mathbf{0{,}09}$$

Interprétation : En choisissant une connexion au hasard, il y a 9 % de chances que celle-ci passe par le serveur C **et** soit instable. Autrement dit, 9 % des connexions sont à la fois routées par C et présentent une instabilité.

Question 4. Démontrer que $P(S) = 0{,}855$.

Les événements A, B et C forment une partition de l'univers (ils sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'univers entier). On applique la **formule des probabilités totales** :

$$P(S) = P(A) \cdot P(S \mid A) + P(B) \cdot P(S \mid B) + P(C) \cdot P(S \mid C)$$

On substitue les valeurs numériques :

$$P(S) = 0{,}25 \times 0{,}90 + 0{,}15 \times 0{,}80 + 0{,}60 \times 0{,}85$$

$$P(S) = 0{,}225 + 0{,}120 + 0{,}510$$

$$\boxed{P(S) = 0{,}855}$$

Question 5. Calculer $P(B \mid S)$.

On applique la **formule de Bayes** :

$$P(B \mid S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}12}{0{,}855}$$

On effectue la division :

$$P(B \mid S) = \frac{0{,}12}{0{,}855} \approx \mathbf{0{,}140}$$

Conclusion : Sachant qu'une connexion est stable, la probabilité qu'elle ait transité par le serveur B est d'environ 14,0 %.

Partie B

On note p la probabilité qu'une connexion soit **instable** :

$$p = P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0{,}855 = 0{,}145$$

Question 1a. Loi suivie par X.

On observe $n = 50$ connexions choisies indépendamment. Chaque connexion est instable avec probabilité $p = 0{,}145$, stable avec probabilité $1 - p = 0{,}855$, indépendamment des autres. On est dans le cadre d'un **schéma de Bernoulli** à $n = 50$ épreuves avec paramètre $p = 0{,}145$.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}145)}$$

Question 1b. Calculer $P(X \leq 8)$.

On utilise la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}145)$. La probabilité s'écrit :

$$P(X \leq 8) = \sum_{k=0}^{8} \binom{50}{k} (0{,}145)^k (0{,}855)^{50-k}$$

Le calcul numérique (à la calculatrice ou par table) donne :

$$\boxed{P(X \leq 8) \approx 0{,}889}$$

Il y a donc environ 88,9 % de chances d'observer au plus 8 connexions instables sur 50.

Question 2a. Exprimer $p_n = P(X_n \geq 1)$ en fonction de n.

X_n désigne le nombre de connexions instables sur n connexions, $X_n \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}145)$.

$$p_n = P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} (0{,}145)^0 (0{,}855)^n$$

$$\boxed{p_n = 1 - (0{,}855)^n}$$

Question 2b. Trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0{,}99$.

On résout l'inégalité :

$$1 - (0{,}855)^n \geq 0{,}99$$

$$\iff (0{,}855)^n \leq 0{,}01$$

On prend le logarithme (la fonction logarithme est croissante, et $\ln(0{,}855) < 0$ donc l'inégalité change de sens) :

$$n \cdot \ln(0{,}855) \leq \ln(0{,}01)$$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}855)} = \frac{-4{,}6052}{-0{,}1567} \approx 29{,}38...$$

Wait, recalculons précisément :

$$\ln(0{,}01) = \ln(10^{-2}) = -2\ln(10) \approx -4{,}60517$$

$$\ln(0{,}855) \approx -0{,}15664$$

$$\frac{-4{,}60517}{-0{,}15664} \approx 29{,}40$$

Donc $n \geq 29{,}40$, soit $n_{\text{min}} = 30$. Vérifions :

— $n = 29$: $(0{,}855)^{29} \approx e^{29\times(-0{,}15664)} \approx e^{-4{,}542} \approx 0{,}01065 > 0{,}01$ — condition non satisfaite.
— $n = 30$: $(0{,}855)^{30} \approx e^{-4{,}699} \approx 0{,}00910 < 0{,}01$ — condition satisfaite.

$$\boxed{n_{\text{min}} = 30}$$

Question 3a. Calculer $E(F_n)$.

$F_n = \dfrac{X_n}{n}$ est la fréquence d'instabilité observée sur n connexions, avec $X_n \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}145)$.

Par **linéarité de l'espérance** et la formule de l'espérance d'une loi binomiale $E(X_n) = np$:

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times n \times 0{,}145$$

$$\boxed{E(F_n) = 0{,}145}$$

F_n est donc un estimateur non biaisé de $p = 0{,}145$.

Question 3b. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

La variance d'une loi binomiale est $V(X_n) = np(1-p) = n \times 0{,}145 \times 0{,}855 = 0{,}123975n$.

Donc :

$$V(F_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{0{,}123975n}{n^2} = \frac{0{,}123975}{n}$$

L'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** stipule que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2}$$

Avec $\varepsilon = 0{,}1$:

$$P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{0{,}123975/n}{(0{,}1)^2} = \frac{0{,}123975}{0{,}01 \cdot n} = \frac{12{,}3975}{n}$$

$$\boxed{P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}4}{n} \text{ (environ)}}$$

Question 3c. Analyser la conclusion du technicien pour $n = 1000$, $F_{1000} = 0{,}30$.

On calcule d'abord l'écart entre la fréquence observée et la valeur théorique :

$$|F_{1000} - 0{,}145| = |0{,}30 - 0{,}145| = 0{,}155 > 0{,}1$$

On applique Bienaymé-Tchebychev avec $\varepsilon = 0{,}155$ et $n = 1000$:

$$P(|F_{1000} - 0{,}145| \geq 0{,}155) \leq \frac{V(F_{1000})}{(0{,}155)^2} = \frac{0{,}123975/1000}{0{,}024025} \approx \frac{1{,}240 \times 10^{-4}}{2{,}403 \times 10^{-2}} \approx 0{,}00516$$

La probabilité d'observer un tel écart est donc **inférieure à** $0{,}52\,\%$ — un événement très improbable si le réseau fonctionne normalement.

On peut aussi utiliser le majorant moins fin avec $\varepsilon = 0{,}1$ (qui couvre aussi $\varepsilon = 0{,}155$) :

$$P(|F_{1000} - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}4}{1000} = 0{,}0124 \approx 1{,}24\,\%$$

Conclusion : La fréquence $F_{1000} = 0{,}30$ s'écarte de $0{,}155$ de la valeur attendue $0{,}145$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, un tel écart n'a qu'une probabilité inférieure à $1{,}25\,\%$ de se produire si le réseau est normal. **Le technicien a donc raison** : une fréquence d'instabilité de $30\,\%$ est statistiquement anormale et laisse fortement supposer un dysfonctionnement du réseau.