

Exercice 1. (5 points)

Une équipe américaine a cartographié pour la première fois les allergies alimentaires chez l'enfant aux États-Unis en 2020. L'étude, publiée dans la revue *Clinical Pediatrics*, révèle une différence nette entre les zones rurales et les zones urbaines.

On sait qu'en 2020, 17 % de la population des États-Unis habite en zone rurale et 83 % en zone urbaine.

L'étude menée montre que parmi les enfants des États-Unis vivant en zone rurale, il y en a 6,2 % qui sont atteints d'allergie alimentaire.

Pour un événement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et \bar{E} son événement contraire.

Sauf mention contraire, les probabilités seront données sous forme exacte.

Partie A.

On interroge au hasard un enfant dans la population des États-Unis et on note :

- R L'événement : « l'enfant interrogé habite en zone rurale » ;
- A L'événement : « l'enfant interrogé est atteint d'allergie alimentaire ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité. Cet arbre pourra être complété par la suite.
2. a. Calculer la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire.
b. En déduire la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire.
c. L'enfant interrogé habite en zone urbaine. Quelle est la probabilité qu'il soit atteint d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à 10^{-4} .

Partie B.

L'étude révèle aussi que 9 % des enfants des États-Unis sont atteints d'allergie alimentaire. On réalise une étude en interrogeant au hasard 100 enfants des États-Unis.

On admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'enfants atteints d'allergie alimentaire dans l'échantillon considéré.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à 10^{-4} .

Partie C.

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.

L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires A_1, A_2, \dots, A_{20} . On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25.

On considère la variable aléatoire :

$$M_{20} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}$$

1. Que représente la variable aléatoire M_{20} dans le contexte de l'exercice ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de M_{20} .
3. Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que

$$P(2 < M_{20} < 6) > 0,97.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.