

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} dx$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

Exercice 3 (4 points)

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64.

Par exemple, « gP3g » est une telle séquence.

Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
 - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
 - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
 - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
 - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?