

Exercice 1 (6 points)

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes.

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.

En cas de contrôle total, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.

En cas de contrôle partiel, il n'y a pas d'erreur détectée dans 85 % des cas.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.

On considère les événements suivants :

- T : « *Le contrôle est un contrôle total* » ;
- E : « *Une erreur est détectée lors du contrôle* ».

On notera \bar{T} et \bar{E} les événements contraires de T et E .

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P(\bar{T} \cap E)$.
2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle.
3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactly 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.
Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1 , X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0,165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1 .
2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Justifier que $E(S) = 9,9$ et que $V(S) = 8,2665$.
3. Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.
À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à 0,48.