EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44{,}5$.

On souhaite écrire une fonction `suite`, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction `suite`.

```python
def suite(n):
    U=30
    W=45
    for i in range (1,n+1):
        U=U/2+10
        W=W/2+U/2+7
    return W
```

2. L'exécution de `suite`(1) ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction `suite` afin que l'exécution de `suite`(n) renvoie la valeur du terme w_n ?
3. (a) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10\,n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

   (b) On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10\,n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.

   Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?