

Exercice 4 (6 points)

Partie A : étude de la fonction f .

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$, où \ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.

- Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.
- Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.

2.

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1; 2]$.
- Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.
- Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g .

La fonction g est définie sur $]0; 1]$ par $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0; 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

2.

- Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $]0; \frac{1}{\alpha}[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
- On admet le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-

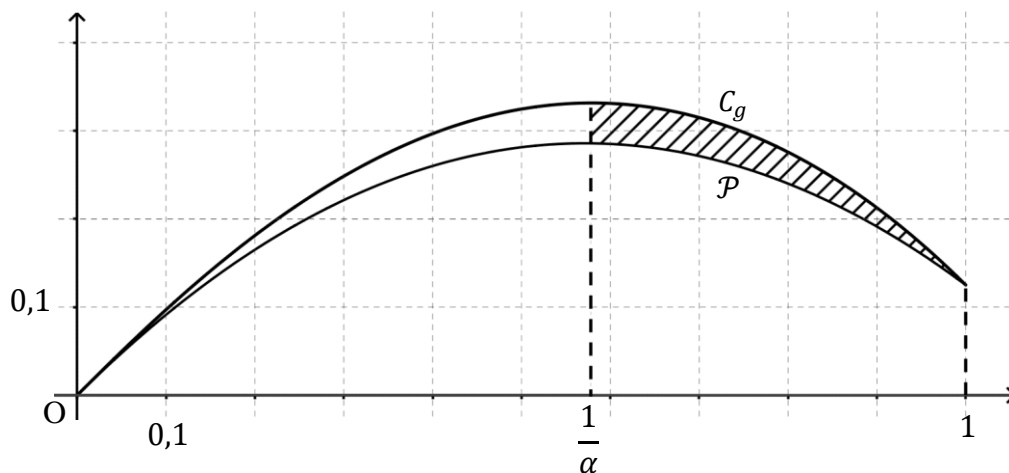
En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0; 1]$.
Les images et les limites ne sont pas demandées.

Tourner la page.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe C_g de la fonction g ;
- La parabole \mathcal{P} d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.



On souhaite calculer l'aire \mathcal{A} du domaine hachuré compris entre les courbes C_g et \mathcal{P} , et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1.

a. Justifier la position relative des courbes C_g et \mathcal{P} sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} .$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire \mathcal{A} .