

### Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(5; 5; 0)$ ,  
 $B(0; 5; 0)$ ,  $C(0; 0; 10)$  et  $D(0; 0; -\frac{5}{2})$ .

1.

a. Montrer que  $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $(CAD)$ .

b. En déduire que le plan  $(CAD)$  a pour équation cartésienne :  $x - y = 0$ .

2. On considère la droite  $\mathcal{D}$  de représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

a. On admet que la droite  $\mathcal{D}$  et le plan  $(CAD)$  sont sécants en un point  $H$ . Justifier que les coordonnées de  $H$  sont  $(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0)$ .

b. Démontrer que le point  $H$  est le projeté orthogonal de  $B$  sur le plan  $(CAD)$ .

3.

a. Démontrer que le triangle  $ABH$  est rectangle en  $H$ .

b. En déduire que l'aire du triangle  $ABH$  est égale à  $\frac{25}{4}$ .

4.

a. Démontrer que  $(CO)$  est la hauteur du tétraèdre  $ABCH$  issue de  $C$ .

b. En déduire le volume du tétraèdre  $ABCH$ .

*On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :  $V = \frac{1}{3}Bh$  où  $B$  est l'aire d'une base et  $h$  la hauteur relative à cette base.*

5. On admet que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ . Déduire des questions précédentes la distance du point  $H$  au plan  $(ABC)$ .

