

Exercice 4 (4 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$.
On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n .

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. On considère le script Python ci-dessous :

```
1  from math import *
2  def seuil(n) :
3      u=5
4      i=0
5      ℓ=(1+sqrt(5))/2
6      while abs(u-ℓ)>=10**(-n) :
7          u=sqrt(u+1)
8          i=i+1
9      return(i)
```

On rappelle que la commande `abs(x)` renvoie la valeur absolue de x .

- a. Donner la valeur renvoyée par `seuil(2)`.
- b. La valeur renvoyée par `seuil(4)` est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.