

Exercice 4 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-2; 0; 2)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(1; -1; 2)$ et $D(0; 0; 3)$.
- la droite \mathcal{D}_1 dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$
- la droite \mathcal{D}_2 dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 3y + 5z - 8 = 0$$

c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. a. Justifier que la droite \mathcal{D}_1 est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D .

On admet que la droite \mathcal{D}_2 est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C .

b. Démontrer que les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC) .

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC) . Arrondir le résultat au centième.