

## Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $f(x) = 2xe^{-x}$ .  
On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

- a.** Résoudre sur l'intervalle  $[0; 1]$  l'équation  $f(x) = x$ .  
**b.** Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$ .  
**c.** Donner le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0,1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a.** Démontrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ .  
**b.** En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- 3.** Démontrer que la limite de la suite  $(u_n)$  est  $\ln(2)$ .
- a.** Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\ln(2) - u_n$  est positif.  
**b.** On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de  $\ln(2)$  par défaut à  $10^{-4}$  près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.  
Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil():  
    n=0  
    u=0.1  
    while ln(2) - u ... 0.0001:  
        n=n+1  
        u=...  
    return (u, n)
```

- c.** Donner la valeur de la variable  $n$  renvoyée par la fonction `seuil()`.