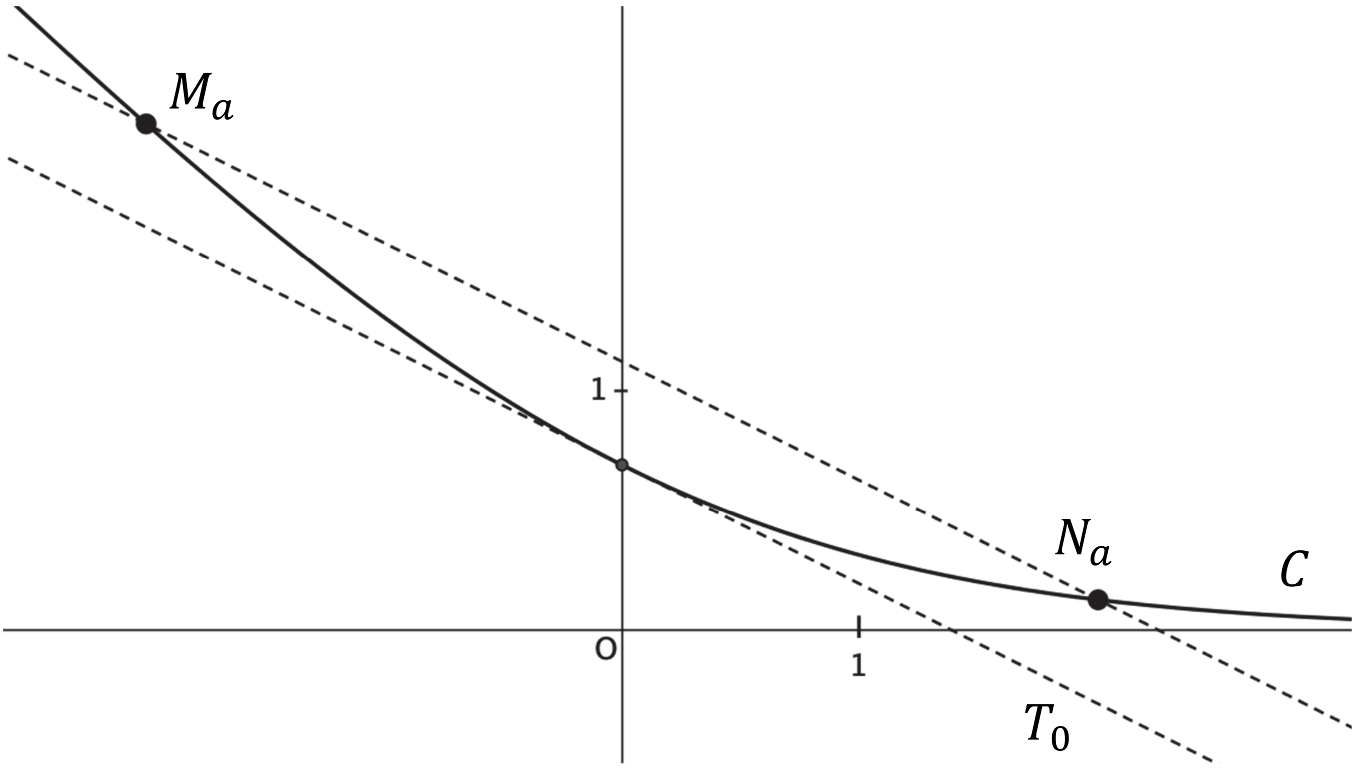
Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La courbe C est tracée ci-dessous.



1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   Interpréter graphiquement ce résultat.

   c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{-1}{1+e^{x}}$.

   d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe C en son point d'abscisse *0*.

   a. Déterminer une équation de la tangente T_0.

   b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

   $$f(\mathrm{x}) \geq -\frac{1}{2}\mathrm{x} + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe C d'abscisses respectives $-a$ et a. On a donc : $M_a\left(-a\,;f(-a)\right)$ et $N_a\left(a\,;f(a)\right)$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a :
$f(x) - f(-x) = -x$.

b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.