VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Terminale Spécialité Mathématiques — 48 Exercices

Coordonnées · Droites · Plans · Orthogonalité · Produit scalaire · BAC

Partie A — Vecteurs de l'espace

Rappel

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\overrightarrow{AB} = B - A$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Colinéarité : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ \vec{v} = k\vec{u}$.

Exercice 1 — Coordonnées de vecteurs

Solution
utspe.com

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 2; -1)$, $B(4; -1; 3)$, $C(-2; 3; 0)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$.
3. Vérifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).
4. Déterminer les coordonnées du milieu M de $[BC]$.

Exercice 2 — Colinéarité

Solution
utspe.com

1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-3\\9\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
2. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
3. Déterminer la valeur de k pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$ soient colinéaires.
4. Les points $A(1; 0; 2)$, $B(3; -2; 4)$, $C(7; -6; 8)$ sont-ils alignés ?

Exercice 3 — Combinaisons linéaires

Solution
utspe.com

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. Calculer $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$.
2. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.
3. Existe-t-il des réels α, β tels que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{w}$? Si oui, les trouver.
4. Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 — Milieu, barycentre

Solution
utspe.com

On donne $A(2;1;3)$, $B(-2;3;-1)$, $C(4;-1;5)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
3. Vérifier que G vérifie $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
4. Déterminer le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Exercice 5 — Norme et distance

Solution
utspe.com

1. Calculer la distance AB avec $A(1;-2;3)$ et $B(4;2;-1)$.
2. Un point $M(x;y;z)$ est à distance 3 de l'origine. Quelle équation vérifient x, y, z ?
3. Montrer que le triangle de sommets $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(1;\sqrt{3};0)$ est équilatéral.
4. Trouver le point de l'axe des x le plus proche de $P(2;3;-1)$.

Partie B — Droites de l'espace

Rappel

Droite passant par $A(a_1;a_2;a_3)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}$: $\begin{cases}x=a_1+lt\\y=a_2+mt\\z=a_3+nt\end{cases}$.

Exercice 6 — Représentation paramétrique

Solution
utspe.com

1. Donner une représentation paramétrique de la droite d_1 passant par $A(1;0;2)$ et $B(3;-1;4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d_2 passant par $C(-2;1;0)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.
3. Le point $M(5;-2;6)$ appartient-il à d_1 ?
4. Le point $N(0;-1;3)$ appartient-il à d_2 ?

Exercice 7 — Positions relatives de deux droites

Solution
utspe.com

On considère les droites :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = s \\ z = 2 + s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

1. d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier.
2. Chercher si d_1 et d_2 ont un point d'intersection (résoudre le système).
3. En déduire la position relative de d_1 et d_2.
4. Donner une droite d_3 parallèle à d_1 et passant par $P(0;1;-1)$.

Exercice 8 — Droite définie par deux conditions

Solution
utspe.com

1. Trouver la droite passant par $A(2;1;-1)$ et $B(0;3;2)$.
2. Trouver la droite passant par $C(1;0;0)$ et parallèle à $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.
3. Trouver la droite passant par $D(0;0;1)$ et perpendiculaire au plan $2x-y+z=0$.
4. Montrer que les points $E(1;2;3)$, $F(3;1;2)$, $G(5;0;1)$ sont alignés.

Exercice 9 — Paramètre sur une droite

La droite d a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1+t \\ z = 1-2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Solution
utspe.com

1. Calculer les coordonnées du point de d correspondant à $t = 0$, $t = 1$ et $t = -1$.
2. Trouver le paramètre t_0 pour lequel le point de d a une abscisse nulle.
3. Trouver le point de d d'ordonnée 3.
4. Calculer la distance entre les points de d correspondant à $t = 0$ et $t = 2$.

Exercice 10 — Droite et plan

Solution
utspe.com

1. La droite d : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 3-t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ est-elle parallèle au plan $\mathcal{P} : x+y+z = 0$?
2. Chercher l'intersection de d avec le plan $\mathcal{P}' : x - y + 2z = 5$.
3. La droite d' passant par $A(1;1;1)$ de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est-elle perpendiculaire à $\mathcal{P}'$?
4. Trouver le pied de la perpendiculaire abaissée de $B(2;0;3)$ sur $\mathcal{P}'$.

Partie C — Plans de l'espace

Rappel

Plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$: vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Trois points non alignés définissent un unique plan.

Exercice 11 — Équation cartésienne d'un plan

Solution
utspe.com

1. Donner l'équation du plan passant par $A(1;0;0)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $B(2;1;-\frac{1}{3})$ appartient à ce plan.
3. Donner l'équation du plan passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
4. Donner l'équation du plan xOy (plan d'équation $z = 0$) et du plan xOz.

Exercice 12 — Plan défini par trois points

Solution
utspe.com

1. Trouver l'équation du plan passant par $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$.
2. Trouver l'équation du plan passant par $P(1;1;1)$, $Q(2;0;1)$, $R(1;2;3)$.
3. Vérifier que $S(3;-1;2)$ appartient ou non au plan (PQR).
4. Un plan passant par l'origine et contenant $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$: trouver son équation.

Exercice 13 — Positions relatives de deux plans

Solution
utspe.com

1. Les plans $\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z = 1$ et $\mathcal{P}_2 : 4x - 2y + 6z = 5$ sont-ils parallèles ? Justifier.
2. Les plans $\mathcal{P}_3 : x + y - z = 2$ et $\mathcal{P}_4 : 2x - y + z = 1$ sont-ils parallèles ?
3. Si non, déterminer une droite de leur intersection (une représentation paramétrique).
4. Déterminer le plan parallèle à $\mathcal{P}_1$ passant par $M(0;1;0)$.

Exercice 14 — Intersection de trois plans

Solution
utspe.com

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$
2. Interpréter géométriquement la solution (point d'intersection des trois plans).
3. Modifier le second membre pour que le système soit incompatible (justifier).
4. Que représente géométriquement un système 3×3 à infinité de solutions ?

Exercice 15 — Plan et droite : positions relatives

Solution
utspe.com

1. La droite $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est-elle dans le plan $\mathcal{P} : x - y + z = 3$?
2. Sinon, calculer leur point d'intersection.
3. Une droite d' est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si $\vec{u}_{d'} \cdot \vec{n}_{\mathcal{P}} = 0$. Trouver un vecteur directeur d'une droite parallèle à $\mathcal{P}$.
4. Trouver la droite passant par $A(1;0;2)$, parallèle à $\mathcal{P}$ et à la droite d.

Partie D — Orthogonalité

Rappel

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Droite $\perp$ plan $\Leftrightarrow$ vecteur directeur de la droite = vecteur normal au plan.
Deux plans $\perp$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Exercice 16 — Vecteurs orthogonaux

Solution
utspe.com

1. Vérifier que $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
2. Trouver tous les vecteurs $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Parmi $\vec{a}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, lesquels sont orthogonaux deux à deux ?
4. Trouver k tel que $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

Exercice 17 — Droite perpendiculaire à un plan

Solution
utspe.com

1. Donner la droite passant par $A(1; 2; 3)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P} : 2x - y + 3z = 0$.
2. Trouver le pied H de la perpendiculaire de A sur $\mathcal{P}$.
3. Calculer la distance de A au plan $\mathcal{P}$ (utiliser AH).
4. Quelle est l'image de A par la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$?

Exercice 18 — Plans perpendiculaires

Solution
utspe.com

1. Les plans $\mathcal{P}_1 : x - 2y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 2x + y + 0z = 1$ sont-ils perpendiculaires ?
2. Trouver un plan perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ et contenant l'axe des z.
3. Deux plans perpendiculaires se coupent selon une droite. Trouver cette droite pour $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
4. Trouver le plan perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ passant par $M(1; 0; 1)$.

Exercice 19 — Droite perpendiculaire à une droite

Solution
utspe.com

1. Trouver tous les vecteurs directeurs $\vec{d}$ orthogonaux à $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et à $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.
2. En déduire la droite passant par $O(0;0;0)$, perpendiculaire à la fois à d_1 (de direction $\vec{u}$) et à d_2 (de direction $\vec{v}$).
3. Cette droite est-elle unique ? Justifier.
4. Calculer l'angle entre d_1 et d_2 (utiliser le produit scalaire des vecteurs directeurs).

Exercice 20 — Hauteur d'un tétraèdre

Solution
utspe.com

Soit le tétraèdre $ABCD$ avec $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;5)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Trouver l'équation du plan (ABC).
3. Trouver la hauteur DH issue de D sur le plan (ABC).
4. Calculer le volume du tétraèdre ($V = \frac{1}{3} \times$ aire de base $\times$ hauteur).

Partie E — Produit scalaire dans l'espace

Rappel

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$ où $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 21 — Calcul de produits scalaires

Solution
utspe.com

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec $A(1;0;2)$, $B(3;-1;1)$, $C(2;2;4)$.
3. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ en utilisant $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
4. Calculer $(\vec{u}-\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v})$ et l'identifier à $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Exercice 22 — Angle entre deux vecteurs

Solution

utspe.com

1. Calculer l'angle $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$ dans le triangle $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.
3. Vérifier que les diagonales d'un cube de côté 1 (de $O(0;0;0)$ à $G(1;1;1)$ et de $A(1;0;0)$ à $H(0;1;1)$) forment un angle de $\arccos(1/3)$.
4. Trouver tous les vecteurs unitaires faisant un angle de 60° avec $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 23 — Angle entre une droite et un plan

Solution

utspe.com

1. L'angle α entre la droite d (vecteur directeur $\vec{u}$) et le plan $\mathcal{P}$ (vecteur normal $\vec{n}$) vérifie $\sin \alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{n}\|}$.
2. Calculer l'angle entre la droite de direction $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan $x + y = 0$.
3. Calculer l'angle entre l'axe des x et le plan $x + y + z = 1$.
4. Une droite fait un angle de 30° avec le plan $z = 0$. Que peut-on dire de son vecteur directeur ?

Exercice 24 — Angle entre deux plans

Solution

utspe.com

L'angle entre deux plans est l'angle entre leurs vecteurs normaux (ou son supplément).

1. Calculer l'angle entre $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x - y + z = 0$.
2. Calculer l'angle entre $\mathcal{P}_3 : 2x - y + 2z = 0$ et $\mathcal{P}_4 : x + 2y - 2z = 0$.
3. Trouver deux plans perpendiculaires contenant la droite d'axe Oz.
4. Trouver un plan formant un angle de 45° avec le plan xOy.

Exercice 25 — Produit scalaire et géométrie

Solution
utspe.com

1. Montrer que le triangle $A(1;0;2)$, $B(3;1;-1)$, $C(2;-2;0)$ est rectangle. En quel sommet ?
2. Trouver le projeté orthogonal de $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ sur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
3. Montrer l'identité du parallélogramme : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$.
4. En déduire les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu commun.

Partie F — Distances

Rappel

Distance d'un point M au plan $ax+by+cz+d=0$: $d(M,\mathcal{P}) = \dfrac{|aX_M+bY_M+cZ_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exercice 26 — Distance d'un point à un plan

Solution
utspe.com

1. Calculer la distance de $A(1;2;3)$ au plan $\mathcal{P} : 2x-y+2z-5=0$.
2. Calculer la distance de $B(0;0;0)$ au plan $\mathcal{P}' : x+y+z-3=0$.
3. Trouver tous les points de l'axe des z équidistants des plans $2x+y=1$ et $x-2y=3$.
4. Calculer la distance entre les plans parallèles $3x-4z=5$ et $3x-4z=10$.

Exercice 27 — Distance d'un point à une droite

Solution
utspe.com

Pour calculer la distance de M à une droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on cherche le projeté orthogonal H de M sur d :

$$H = A + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

La distance cherchée est alors MH.

1. Calculer la distance de $M(2;3;1)$ à la droite passant par $A(0;0;0)$ de direction $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
2. Calculer la distance de $M(1;-1;2)$ à la droite $d : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.
3. Vérifier le résultat en donnant les coordonnées du pied de la perpendiculaire.
4. Calculer la distance de $P(1;0;0)$ à la droite d' passant par $A(0;1;0)$ et $B(0;0;1)$.

Exercice 28 — Distance entre deux droites gauches

Solution
utspe.com

Deux droites gauches sont deux droites de l'espace qui ne sont ni parallèles ni sécantes. On peut les étudier avec des systèmes et des plans auxiliaires.

1. On donne $d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 1 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$.
   Montrer que d_1 et d_2 sont gauches (ni parallèles ni sécantes).
2. Trouver un plan $\mathcal{P}$ contenant d_1 et parallèle à d_2.
3. Vérifier que tous les points de d_2 sont à la même distance du plan $\mathcal{P}$.
4. Calculer cette distance. Elle donne ici la distance entre d_1 et d_2.

Exercice 29 — Sphère

Solution
utspe.com

Une sphère de centre Ω et de rayon r a pour équation $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

1. Montrer que l'ensemble des points équidistants de $A(1;0;0)$ et $B(-1;0;0)$ est le plan $x=0$.
2. Trouver l'équation de la sphère de centre $\Omega(1;2;-1)$ et de rayon 3.
3. Le plan $\mathcal{P} : x+y+z=0$ coupe-t-il cette sphère ? (Comparer la distance de Ω à $\mathcal{P}$ avec r.)
4. Trouver le rayon du cercle d'intersection de la sphère avec $\mathcal{P}$.

Exercice 30 — Application : calcul de volumes

Solution
utspe.com

1. Calculer l'aire du triangle ABC avec $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$ et $C(0;3;0)$.
2. Trouver une équation du plan (ABC).
3. Calculer la distance de $D(0;0;4)$ au plan (ABC).
4. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$ avec la formule

$$V=\frac{1}{3}\times \text{aire de la base}\times \text{hauteur}.$$

Partie G — Exercices type Baccalauréat

Exercice 31 — Bac type : plan, droite et distance

Solution
utspe.com

(6 points) On considère le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et les points $A(2;1;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(4;1;-1)$.

Partie A **(2 pts)**

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Trouver un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC).
3. En déduire l'équation du plan (ABC).

Partie B **(2 pts)**

4. Calculer la distance du point $D(1;2;0)$ au plan (ABC).
5. Le point D appartient-il au plan ? Justifier.

Partie C **(2 pts)**

6. Trouver la droite d passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
7. Calculer les coordonnées du pied H de la perpendiculaire de D sur (ABC).

Exercice 32 — Bac type : positions relatives et intersection

Solution
utspe.com

(7 points) On donne les plans : $\mathcal{P}_1 : x + 2y - z = 3 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : 2x - y + 3z = 1$

Partie A **(2 pts)**

1. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Trouver un point commun à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ (poser $z = 0$).

Partie B **(3 pts)**

3. Montrer que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
4. En déduire une représentation paramétrique de la droite $d = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
5. Le point $M(1; 1; 0)$ appartient-il à d ?

Partie C **(2 pts)**

6. Calculer l'angle dièdre entre $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ (angle entre leurs normales).
7. Trouver l'équation du plan passant par $O(0; 0; 0)$ et perpendiculaire à d.

Exercice 33 — Bac type : tétraèdre

Solution
utspe.com

(8 points) On considère le tétraèdre $OABC$ avec $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$.

Partie A — Arêtes et médiane **(3 pts)**

1. Calculer la longueur de chaque arête du tétraèdre.
2. Calculer le milieu I de $[BC]$ et les coordonnées de $\overrightarrow{OI}$.
3. Montrer que $OA \perp BC$.

Partie B — Plan et hauteur **(3 pts)**

4. Trouver l'équation du plan (ABC).
5. Calculer la distance de O au plan (ABC).
6. En déduire le volume du tétraèdre.

Partie C — Projection **(2 pts)**

7. Trouver le projeté orthogonal H de O sur le plan (ABC).
8. Vérifier que H est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 34 — Bac type : cube et diagonales

Solution
utspe.com

(6 points) On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1 placé dans un repère orthonormé avec $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$.

1. Calculer la longueur des diagonales principales AG et BH.
2. Calculer l'angle $(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BH})$.
3. Trouver l'équation du plan médiateur de $[AG]$ (perpendiculaire à AG en son milieu).
4. Montrer que les droites (AG) et (BH) ne sont pas sécantes.
5. Trouver le plan contenant les deux diagonales de la face $ABCD$ (diagonales AC et BD).
6. Calculer l'angle entre la diagonale AG et la face $ABCD$.

Exercice 35 — Bac type : problème de géométrie dans l'espace

Solution
utspe.com

(7 points) On se place dans un repère orthonormé. Soit le point $A(1;-1;2)$ et le plan $\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 1 = 0$.

Partie A **(2 pts)**

1. Calculer la distance de A à $\mathcal{P}$.
2. Trouver la droite Δ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Partie B **(3 pts)**

3. Trouver les coordonnées du pied H de la perpendiculaire de A sur $\mathcal{P}$.
4. Trouver les coordonnées du symétrique A' de A par rapport à $\mathcal{P}$.
5. Vérifier que $\mathcal{P}$ est le plan médiateur de $[AA']$.

Partie C **(2 pts)**

6. Soit $B(3;1;0)$. Calculer la distance AB et $A'B$.
7. Justifier que B, H et le symétrique de B par rapport à $\mathcal{P}$ sont alignés.

Exercice 36 — Bac type : droites de l'espace et plan commun

Solution

utspe.com

(5 points) On considère les droites : $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 - s \\ z = 3 + 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$

1. Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
2. Montrer qu'elles ne se coupent pas.
3. Les deux droites sont-elles coplanaires ? Justifier.
4. Que peut-on conclure sur leur position relative ?
5. Quel est le plan contenant d_1 et parallèle à d_2 ?

Partie H — Synthèse

Exercice 37 — Plan médiateur

Solution

utspe.com

Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B.

1. Trouver l'équation du plan médiateur de $[AB]$ avec $A(1; 0; 2)$ et $B(3; 2; -2)$.
2. Vérifier que le milieu de $[AB]$ appartient à ce plan.
3. Trouver le centre de la sphère passant par $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$.
4. Trouver le rayon de cette sphère.

Exercice 38 — Intersection de plans et paramètre

Solution

utspe.com

1. Pour quelle(s) valeur(s) de k les plans $\mathcal{P}_1 : kx + 2y - z = 3$ et $\mathcal{P}_2 : x + ky - 2z = 1$ sont-ils parallèles ?
2. Pour $k = 1$, trouver la droite d'intersection.
3. Pour $k = 0$, trouver la droite d'intersection et un point commun aux deux plans.
4. Pour quelles valeurs de k les trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $z = 0$ ont-ils un unique point commun ?

Exercice 39 — Droite et sphère

Soit la sphère $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 25$ et la droite $d : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Solution
utspe.com

1. Calculer la distance du centre O de $\mathcal{S}$ à la droite d.
2. En déduire le nombre de points d'intersection de d et $\mathcal{S}$.
3. Trouver les coordonnées de ces points (résoudre l'équation du second degré en t).
4. Calculer la longueur de la corde d'intersection.

Exercice 40 — Grand Bac blanc

Solution
utspe.com

(10 pts) Soit le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les points $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$ et $D(1; 1; 1)$.

Partie A — Plan (ABC) **(3 pts)**

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Trouver un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC) par combinaison.
3. Écrire l'équation du plan (ABC).

Partie B — Distances **(4 pts)**

4. Calculer la distance de D au plan (ABC).
5. Trouver le pied H de la hauteur issue de D.
6. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
7. Calculer l'aire du triangle ABC.

Partie C — Symétrie **(3 pts)**

8. Trouver le symétrique D' de D par rapport au plan (ABC).
9. Calculer la distance DD'.
10. Montrer que D', A, B, C sont coplanaires si et seulement si D' est dans le plan (ABC).

Exercice 41 — Projeté orthogonal sur une droite

Solution
utspe.com

Le projeté orthogonal de M sur la droite d (point A, direction $\vec{u}$) est $H = A + \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$.

1. Trouver le projeté de $M(2;3;1)$ sur la droite $x = y = z$ ($\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $A = O$).
2. Calculer la distance de M à cette droite.
3. Trouver le projeté de $P(1;0;2)$ sur l'axe des y.
4. Vérifier que $\overrightarrow{PH} \perp \vec{u}$ pour chacun des cas précédents.

Partie I — Systèmes et intersections

Exercice 42 — Système de Cramer

Solution
utspe.com

Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement chaque solution.

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ (étudier selon le rang)
4. $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$

Exercice 43 — Intersection de trois plans selon le rang

Solution
utspe.com

On considère les plans $\mathcal{P}_\lambda : \lambda x + y - z = 2$, $\mathcal{P}' : x + \lambda y + z = 3$, $\mathcal{P}'' : x + y + \lambda z = 4$.

1. Pour $\lambda = 1$, résoudre le système. Interpréter.
2. Pour $\lambda = -2$, le système est-il compatible ? Justifier.
3. Trouver la(les) valeur(s) de λ pour lesquelles le système a une infinité de solutions.
4. Pour $\lambda = 0$, donner la droite d'intersection des trois plans.

Exercice 44 — Droite d'intersection de deux plans

Solution
utspe.com

1. Trouver la droite $d_1 = (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)$ avec $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 1$ et $\mathcal{P}_2 : x - y + 2z = 3$.
2. Trouver la droite $d_2 = (\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_4)$ avec $\mathcal{P}_3 : 2x + y - z = 0$ et $\mathcal{P}_4 : x + 3y + z = 2$.
3. d_1 et d_2 se croisent-elles, se coupent-elles ou sont-elles parallèles ?
4. Trouver le plan contenant d_1 et parallèle à d_2.

Exercice 45 — Plans contenant une droite

Solution
utspe.com

On considère la droite d définie comme intersection des plans $\mathcal{P}_1 : x + y = 1$ et $\mathcal{P}_2 : y + z = 2$.

1. Donner une représentation paramétrique de d.
2. Vérifier que le point $A(1; 0; 2)$ appartient à d.
3. Le plan $\mathcal{Q} : x + 2y + z = 3$ contient-il d ?
4. Trouver un plan contenant d et le point $M(0; 0; 0)$.

Exercice 46 — Équation de plan selon des conditions géométriques

Solution
utspe.com

1. Trouver l'équation du plan passant par $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et perpendiculaire au plan $z = 0$.
2. Trouver l'équation du plan contenant la droite $d : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et perpendiculaire au plan $x + y = 0$.
3. Trouver le plan équidistant des plans $\mathcal{P}_1 : x = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x = 4$.
4. Trouver l'équation du plan parallèle à $z = 1$ passant par $A(2; -1; 3)$.

Exercice 47 — BAC type : système et géométrie

Solution
utspe.com

(6 pts) Une usine dispose de trois convoyeurs modélisés par des droites dans l'espace. $d_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$, $d_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$, $d_3 : \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = 2r \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}$

1. d_1 et d_2 se coupent-elles ? Si oui, trouver leur point d'intersection.
2. d_1 et d_3 sont-elles coplanaires ?
3. Trouver l'équation du plan contenant d_1 et d_3.
4. Calculer la distance entre d_2 et le plan (d_1, d_3).
5. Interpréter géométriquement la situation des trois convoyeurs.

Exercice 48 — BAC type : pyramide dans l'espace

Solution
utspe.com

(8 pts) Soit la pyramide $SABCD$ à base carrée avec $A(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $C(4;4;0)$, $D(0;4;0)$, $S(2;2;6)$.

Partie A **(2 pts)**

1. Calculer les coordonnées du centre G de la base $ABCD$.
2. Montrer que $\overrightarrow{SG}$ est orthogonal aux côtés de la base (vérifier $\overrightarrow{SG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$).

Partie B — Plans et distances **(3 pts)**

3. Trouver l'équation du plan (SAB).
4. Calculer la distance du point D au plan (SAB).
5. Calculer la hauteur de la pyramide et son volume.

Partie C — Intersection **(3 pts)**

6. Trouver l'équation du plan (SCD).
7. La droite $[AC]$ rencontre-t-elle le plan (SCD) ? Si oui, en quel point ?
8. Calculer l'angle entre les plans (SAB) et (SCD).