

# SUITES — 40 Exercices

Terminale Specialite Mathematiques

Suites arithmetiques/geometriques · Sens de variation · Suites recurrentes · Limites · Raisonement par recurrence · Seuil · Python

## Partie A — Suites arithmetiques et geometriques

### Exercice 1 — Nature et termes

1. La suite  $(u_n)$  verifie  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = u_n + 4$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $u_{15}$ .
2. La suite  $(v_n)$  verifie  $v_1 = 3$  et  $v_{n+1} = 2v_n$ . Exprimer  $v_n$  et calculer  $v_8$ .
3. On donne  $u_3 = 11$  et  $u_7 = 27$  pour une suite arithmetique. Trouver la raison et  $u_0$ .
4. On donne  $v_2 = 12$  et  $v_5 = 96$  pour une suite geometrique de raison positive. Trouver la raison et  $v_0$ .

### Exercice 2 — Sommes de termes

1. Calculer  $S = \sum_{k=0}^{30} (3k - 2)$ .
2. Calculer  $T = \sum_{k=1}^{10} 2^k$ .
3. Calculer  $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$  pour  $n$  quelconque.
4. Simplifier et calculer pour  $n = 20$  :  $\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k)$  ou  $(u_n)$  est quelconque.

### Exercice 3 — Suite definie par une relation du type $u_{n+1} = au_n + b$

Soit  $(w_n)$  definie par  $w_0 = 1$  et  $w_{n+1} = 3w_n - 8$ .

1. On pose  $r_n = w_n - a$  ou  $a$  est a determiner pour que  $(r_n)$  soit geometrique. Trouver  $a$ .
2. Exprimer  $r_n$  puis  $w_n$  en fonction de  $n$ .
3. Etudier la limite de  $(w_n)$ .
4. Determiner le rang a partir duquel  $w_n < -1000$ .

### Exercice 4 — Probleme financier

Un capital initial de 3 000 € est place a un taux annuel de 3%. Chaque annee, l'epargnant retire 200 € apres capitalisation. Notons  $C_n$  le capital apres  $n$  annees.

1. Exprimer  $C_{n+1}$  en fonction de  $C_n$ .

2. Montrer que la suite  $(D_n)$  avec  $D_n = C_n - L$  est geometrique pour un  $L$  a determiner.
3. Exprimer  $C_n$  en fonction de  $n$ .
4. Le capital s'annule-t-il? Si oui, a quel rang (environ)?

### Exercice 5 — Suite arithmetico-geometrique (synthese)

On considere la suite  $(u_n)$  definie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ .

1. Trouver le reel  $\ell$  tel que  $(u_n - \ell)$  est geometrique.
2. En deduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et verifier geometriquement (point fixe).
4. Ecrire un programme Python calculant les 20 premiers termes et affichant leur valeur.

## Partie B — Sens de variation

### Rappel

Methodes : (1) signe de  $u_{n+1} - u_n$ ; (2) rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  si  $u_n > 0$ ; (3)  $u_n = f(n)$ , etude de  $f$ .

### Exercice 6 — Variations par difference

Etudier le sens de variation de chaque suite en calculant  $u_{n+1} - u_n$ .

1.  $u_n = 2n^2 - 5n + 1$
2.  $u_n = n^3 - 6n^2$
3.  $u_n = \frac{n}{n+1}$
4.  $u_n = (-1)^n \cdot n$

### Exercice 7 — Variations par ratio

Etudier le sens de variation en utilisant le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

1.  $u_n = \frac{3^n}{n!}$  (montrer que la suite est eventuellement decroissante)
2.  $u_n = \frac{n^2}{2^n}$
3.  $u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

**Exercice 8 — Variations par étude de fonction**

Pour chaque suite, poser  $u_n = f(n)$ , étudier  $f$  puis conclure.

1.  $u_n = n \cdot e^{-n}$  (pour  $n \geq 1$ )
2.  $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$  (pour  $n \geq 1$ )
3.  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

**Exercice 9 — Suite récurrente et monotonie**

Soit  $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$  et la suite  $(u_n)$  avec  $u_0 = 0$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . Conjecturer le comportement.
2. Montrer que pour tout  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 2$  (recurrence).
3. Calculer  $u_{n+1} - u_n$  et montrer que la suite est croissante.

**Exercice 10 — Monotonie avec paramètre**

Soit  $\alpha > 0$  et la suite  $u_n = \alpha^n - n$ .

1. Étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$  selon les valeurs de  $\alpha$ .
2. Pour  $\alpha = 1,1$ , à partir de quel rang la suite est-elle croissante ?
3. Pour  $\alpha = 0,9$ , la suite est-elle éventuellement monotone ?

**Partie C — Suites récurrentes du type  $u_{n+1} = f(u_n)$** **Exercice 11 — Intervalle stable**

Soit  $f(x) = \frac{x+5}{2}$  et  $(u_n)$  avec  $u_0 = 10$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que  $[5; 10]$  est stable par  $f$ .
2. Démontrer par récurrence que  $u_n \in [5; 10]$  pour tout  $n$ .
3. Montrer que la suite est décroissante.
4. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

**Exercice 12 — Points fixes et convergence**

1. Trouver les points fixes de  $g(x) = x^2 - x + 1$ .
2. On pose  $u_0 = 0,5$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$ . Calculer les 5 premiers termes. Que constate-t-on ?
3. Trouver les points fixes de  $h(x) = \sqrt{3x-2}$  (sur le domaine adéquat).
4. Pour la suite  $v_{n+1} = h(v_n)$  avec  $v_0 = 2$ , montrer que  $(v_n)$  converge et trouver sa limite.

**Exercice 13 — Etude complete**

Soit  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$  et  $(u_n)$  avec  $u_0 = 2$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
2. Montrer que  $f([0; 2]) \subset [0; 2]$ .
3. Montrer par recurrence que  $(u_n) \subset [0; 2]$ .
4. Etudier la monotonie de  $(u_n)$  et conclure sur sa convergence.
5. Determiner la limite  $\ell$ .

**Exercice 14 — Suite de Babylone (racine carree)**

Soit  $a > 0$ . On definit  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ .

1. Montrer que  $u_n > 0$  pour tout  $n$ .
2. Montrer que  $u_n \geq \sqrt{a}$  pour tout  $n \geq 1$  (inegalite arithmetique-geometrique).
3. Montrer que  $(u_n)$  est decroissante pour  $n \geq 1$ .
4. En deduire que  $(u_n)$  converge et calculer sa limite.
5. *Application* : avec  $a = 2$ ,  $u_0 = 2$ , calculer  $u_3$  (approximation de  $\sqrt{2}$ ).

**Exercice 15 — Suite recurrente d'ordre 2**

On definit  $(u_n)$  par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  (suite de Fibonacci).

1. Calculer  $u_2, \dots, u_8$ .
2. On admet  $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \psi^n)$  avec  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Verifier pour  $n = 2$ .
3. Calculer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  pour  $n = 1, \dots, 7$ . Vers quoi semble converger ce rapport ?
4. Ecrire un programme Python calculant les 20 premiers termes de Fibonacci.

**Partie D — Raisonnement par recurrence****Rappel**

Toujours : **Initialisation**  $\rightarrow$  **Heredite** (hypothese de recurrence au rang  $n$ , puis demontrer au rang  $n + 1$ )  $\rightarrow$  **Conclusion**.

**Exercice 16 — Formules de sommation**

Demontrer par recurrence pour tout  $n \geq 1$  :

1.  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2.  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1)$
3.  $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

**Exercice 17 — Proprietes de divisibilite**

Demontrer par recurrence :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $3^{2n} - 1$  est divisible par 8.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^3 + 2n$  est divisible par 3.
3. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $4^n > n^2 + n$ .

**Exercice 18 — Formule explicite d'une suite**

1. Soit  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 3u_n + 2$ . Conjecturer  $u_n$  par les premiers termes puis le demontrer par recurrence.
2. Soit  $v_0 = 1$  et  $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$ . Conjecturer  $v_n$  puis demontrer par recurrence.
3. Soit  $w_0 = 1$  et  $w_{n+1} = (n+2)w_n$ . Conjecturer  $w_n$  en termes de factorielle, puis demontrer.

**Exercice 19 — Encadrement par recurrence**

Soit  $(u_n)$  definie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ .

1. Montrer par recurrence que  $u_n \geq 0$  pour tout  $n$ .
2. Montrer par recurrence que  $u_n \leq 3$  pour tout  $n$ .
3. En deduire que la suite converge et determiner sa limite.

**Exercice 20 — Double recurrence**

On definit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$  et  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$ .

1. Calculer  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ .
2. Demontrer par recurrence que  $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$  pour tout  $n$ .
3. En deduire que  $\frac{a_n}{b_n}$  est une approximation de  $\sqrt{2}$ .

## Partie E — Limites de suites

## Rappel

Opérations sur les limites, théorèmes de comparaison, des gendarmes, croissances comparées ( $e^n \gg n^k \gg \ln n$ ).

## Exercice 21 — Limites de référence

Calculer (sans justification détaillée) :

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{e^n}$

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$

5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

6.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left(\frac{1}{n}\right)$

## Exercice 22 — Formes indéterminées

Lever les formes indéterminées et calculer :

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)$

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sqrt{n}$

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 5^n}$

4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$

## Exercice 23 — Théorème des gendarmes

Encadrer chaque suite et utiliser le théorème des gendarmes.

1.  $u_n = \frac{\sin n}{n}$

2.  $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

3.  $u_n = \frac{n \cos n}{n^2 + 1}$

4.  $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$  ou  $E$  désigne la partie entière.

## Exercice 24 — Théorème de la limite monotone

Pour chacune des suites suivantes, montrer qu'elle est monotone et bornée, puis calculer sa limite.

1.  $u_0 = 3, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$

2.  $v_0 = 0, v_{n+1} = \frac{v_n^2 + 2}{3}$

$$3. w_0 = 4, w_{n+1} = \frac{2w_n + 8}{w_n + 3}$$

### Exercice 25 — Convergence par comparaison

1. Soit  $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$  pour tout  $n \geq 1$ . Que peut-on dire de  $(u_n)$  ?
2. Soit  $(u_n)$  croissante, majoree par  $M$ . Montrer qu'elle converge (admis : propriete de la borne superieure).
3. Soit  $u_{n+1} = u_n^2$  avec  $0 < u_0 < 1$ . Montrer que  $(u_n)$  tend vers 0.
4. Meme question avec  $u_0 > 1$ .

## Partie F — Seuil et Python

### Rappel

**Seuil :** trouver  $n_0 = \min\{n \mid u_n > S\}$  ou  $u_n < \varepsilon$ . Methode algebrique : ln. Methode algorithmique : boucle `while`.

### Exercice 26 — Seuil par le logarithme

1. Soit  $u_n = 2^n$ . Trouver le plus petit  $n$  tel que  $u_n > 10^6$ .
2. Soit  $v_n = 1000 \times (0,95)^n$ . Trouver le plus petit  $n$  tel que  $v_n < 10$ .
3. Soit  $w_n = n^2$ . Trouver le plus petit  $n$  tel que  $w_n > 10^4$ .
4. Soit  $t_n = 5 \times 1,07^n$ . Trouver le plus petit  $n$  tel que  $t_n > 500$ . *On rappelle que  $\ln(1,07) \approx 0,0677$ .*

### Exercice 27 — Algorithme a completer

Compléter les programmes Python suivants.

a) Premier rang  $n$  tel que  $u_n = 3 \times 1,05^n > 100$  :

```
u = 3
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = n + 1
print("Rang :", n, " Valeur :", round(u, 4))
```

b) Somme  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  ; premier  $n$  tel que  $S_n > 200$  :

```
u = 3
S = 3
n = 0
while S <= 200:
    ...
    ...
    S = S + u
print("Rang :", n, " Somme :", round(S, 4))
```

**Exercice 28 — Convergence et precision**

La suite  $(u_n)$  verifie  $u_0 = 10$  et  $u_{n+1} = 0,8u_n + 4$ .

1. Calculer la limite  $\ell$  (point fixe).
2. Ecrire un programme Python affichant le premier rang  $n$  tel que  $|u_n - \ell| < 0,001$ .
3. Modifier le programme pour afficher tous les termes jusqu'a ce rang.
4. Comparer le resultat avec la formule  $u_n = \ell + (u_0 - \ell)(0,8)^n$ .

**Exercice 29 — Simulation Monte-Carlo (Python)**

On simule  $n$  lancers de deux des. On note  $S_n$  la proportion de lancers ou la somme vaut 7.

1. Calculer theoriquement  $p = P(\text{somme} = 7)$ .
2. Completer le programme suivant et expliquer en quoi il illustre la loi des grands nombres :

```

1 import random
2
3 n = 10000
4 succes = 0
5
6 for _ in range(n):
7     d1 = random.randint(1, 6)
8     d2 = random.randint(1, 6)
9     if ...:
10        succes += 1
11
12 print("Frequence :", succes / n)
13 print("Proba theorique :", ...)
```

3. Modifier le programme pour afficher la frequence toutes les 1000 iterations et observer la convergence.

**Exercice 30 — Algorithme de recherche de seuil generique**

On veut ecrire une fonction Python `seuil(u0, f, S)` qui retourne le premier rang  $n$  tel que  $u_n > S$ , ou  $(u_n)$  est definie par  $u_0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Ecrire la fonction `seuil`.
2. Tester avec  $u_0 = 1$ ,  $f(x) = x + 1,5$ ,  $S = 20$ .
3. Tester avec  $u_0 = 0,001$ ,  $f(x) = 2x$ ,  $S = 1$ .
4. Que se passe-t-il si la suite ne depasse jamais  $S$ ? Modifier la fonction pour eviter une boucle infinie (ajouter un parametre `max_iter`).

## Partie G — Exercices type Bacalauréat

### Exercice 31 — Bac type (suite géométrique et seuil)

**(5 points)** Une entreprise réalise un chiffre d'affaires de 500 000 € en 2020. On estime que le chiffre d'affaires augmente de 8 % par an. On note  $C_n$  le chiffre d'affaires (en milliers d'euros) l'année 2020 +  $n$ .

1. Montrer que  $(C_n)$  est géométrique. Exprimer  $C_n$  en fonction de  $n$ .
2. Calculer  $C_5$ . Interpréter.
3. Déterminer le rang  $n_0$  à partir duquel  $C_n$  dépasse 1 000 000 €.

4. Calculer le chiffre d'affaires cumulé  $\sum_{k=0}^{10} C_k$ .

5. Écrire un programme Python qui calcule et affiche le rang  $n_0$ .

### Exercice 32 — Bac type (suite récurrente et convergence)

**(6 points)** Soit  $f(x) = \frac{4x}{x+3}$  et la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 6$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  et dresser son tableau de variations.
2. Déterminer les points fixes de  $f$  dans  $[0; +\infty[$ .
3. Montrer par récurrence que  $u_n \in [0; 6]$  pour tout  $n$ .
4. Montrer que la suite est décroissante.
5. En déduire que  $(u_n)$  converge. Déterminer sa limite.
6. Écrire un programme Python calculant les 30 premiers termes et estimant la limite.

### Exercice 33 — Bac type (récurrence et suites imbriquées)

**(6 points)** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . Que conjecturez-vous ?
2. Montrer par récurrence que  $u_n > 0$  pour tout  $n$ .
3. On pose  $v_n = u_n - \sqrt{3}$ . Montrer que  $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n + 2}$ .
4. En déduire le signe de  $v_n$  puis la monotonie de  $(u_n)$ .
5. Montrer que  $(u_n)$  est bornée et conclure sur sa convergence.
6. Calculer la limite.

### Exercice 34 — Bac type (modélisation et Python)

**(7 points)** On modélise l'évolution d'une population de poissons dans un lac. À l'année  $n$ , la popu-

lation est  $P_n$  (en milliers). On a :

$$P_0 = 20 \quad P_{n+1} = 1,2 P_n - \frac{P_n^2}{100} - 3$$

### Partie A

1. Calculer  $P_1$  et  $P_2$  (arrondir a 0,01).
2. Le terme  $\frac{P_n^2}{100}$  modelise la surpopulation et 3 represente la peche annuelle. Interpreter chaque terme de la relation de recurrence.

### Partie B

3. On cherche les equilibres (points fixes). Montrer qu'ils verifient  $P^2 - 20P + 300 = 0$ . Calculer ces equilibres.
4. On admet que si  $P_0 \in [10; 50]$ , alors  $P_n \in [10; 50]$  pour tout  $n$ . Ecrire un programme Python qui affiche les 20 premieres valeurs et estime la limite.
5. D'apres les simulations, vers quel equilibre la suite converge-t-elle ?

### Partie C

6. Si la peche annuelle passe a 10 (milliers), modifier la relation et relancer la simulation. Que se passe-t-il pour la population ?

### Exercice 35 — Bac type (recurrence double et somme telescopique)

(5 points) Soit  $(u_n)$  definie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ .
2. Montrer que  $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$  (decomposition en elements simples).
3. En deduire que  $u_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$ .
4. Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$  (somme telescopique).
5. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exercice 36 — Bac type (suite et recurrence, niveau difficile)

(6 points) Soit  $(u_n)$  definie par  $u_1 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{3u_n^2}{2(u_n + 1)}$  pour  $n \geq 1$ .

1. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Montrer que si  $u_n > 3$  alors  $u_{n+1} > 3$ .
3. Montrer que si  $u_n < 3$  alors  $u_{n+1} < 3$ .
4. En deduire par recurrence que  $u_n < 3$  pour tout  $n \geq 1$ .

5. On pose  $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{3}$ . Montrer que  $(v_n)$  est géométrique.
6. En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## Partie H — Exercices de synthèse

### Exercice 37 — Suite et inégalité classique

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{1}{u_n} \right)$ .

1. Montrer que  $u_n \geq 1$  pour tout  $n \geq 1$ .
2. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante pour  $n \geq 1$ .
3. En déduire la limite. Que calcule cet algorithme ?

### Exercice 38 — Suite et arithmétique

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ .
2. En utilisant la décomposition  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , montrer que  $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ .
3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
4. La suite  $(u_n)$  est-elle géométrique ? arithmétique ? Justifier.

### Exercice 39 — Exploration Python : suite de Syracuse

La suite de Syracuse est définie par  $u_0 = N$  (entier  $> 0$ ) et :

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Calculer à la main les premiers termes pour  $N = 6$  jusqu'à obtenir 1.
2. Écrire un programme Python qui, pour un  $N$  donné, affiche la suite jusqu'à 1 et compte le nombre de pas.

```

1 N = int(input("Entrer N : "))
2 u = N
3 compteur = 0
4 while u != 1:
5     if u % 2 == 0:
6         u = ...
7     else:
8         u = ...
9     compteur += 1
10    print(u)
11 print("Nombre de pas :", compteur)

```

3. Modifier le programme pour trouver, parmi  $N = 1, 2, \dots, 100$ , la valeur de  $N$  necessitant le plus de pas.
4. (*Conjecture de Collatz, non demontree*) Que conjecture-t-on sur toutes ces suites ?

#### Exercice 40 — Grand exercice de synthese (Bac blanc)

**(10 points)**

On etudie un modele de remboursement de pret immobilier. Un emprunteur contracte un pret de 200 000 € au taux mensuel de 0,35 %. Il rembourse une mensualite constante de  $m$  € chaque mois. On note  $R_n$  le capital restant du apres le  $n$ -ieme remboursement.

##### Partie A — Mise en equation

**(2 pts)**

1. Montrer que  $R_{n+1} = 1,0035 R_n - m$  avec  $R_0 = 200\,000$ .
2. Montrer que si  $m = 1,0035 \cdot L$  alors la suite  $(R_n - L)$  est geometrique. Exprimer  $L$  en fonction de  $m$ .

##### Partie B — Expression de $R_n$

**(2 pts)**

3. Exprimer  $R_n$  en fonction de  $n$ ,  $m$  et  $R_0$ .
4. Pour un pret sur 240 mois (20 ans),  $R_{240} = 0$ . En deduire la valeur de  $m$  (arrondir au centime).

##### Partie C — Analyse

**(3 pts)**

5. Calculer le cout total du credit (total rembourse moins capital emprunte).
6. Montrer que la suite  $(R_n)$  est decroissante si  $m > 1,0035 \cdot R_0$ .
7. Existe-t-il un rang a partir duquel la mensualite rembourse plus de capital que d'interets ?

##### Partie D — Python et seuil

**(3 pts)**

8. Ecrire un programme Python qui simule le remboursement mois par mois et affiche : le mois, le capital restant du, la part d'interets et la part de capital dans la mensualite.
9. Utiliser ce programme pour trouver le mois a partir duquel la part de capital depasse la part d'interets.
10. Si le taux passe a 0,40 % mensuel, recalculer la mensualite pour un pret de 20 ans. Comparer.

## Partie I — Systemes de suites

### Rappel

Un **systeme de suites** couple deux suites via des relations du type  $\begin{cases} u_{n+1} = a u_n + b v_n \\ v_{n+1} = c u_n + d v_n \end{cases}$ . Strategie principale : chercher des combinaisons lineaires  $s_n = u_n + \alpha v_n$  qui forment une suite geometrique (**diagonalisation**).

**Exercice 41 — Systeme lineaire (introduction)**

On definit  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 3$  et : 
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1, v_1, u_2, v_2$ .
2. On pose  $s_n = u_n + v_n$  et  $d_n = u_n - v_n$ .
  - a. Montrer que  $(s_n)$  est geometrique et exprimer  $s_n$ .
  - b. Montrer que  $(d_n)$  est geometrique et exprimer  $d_n$ .
3. En deduire  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .
4. Etudier les limites de  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**Exercice 42 — Recherche de la combinaison diagonalisante**

On considere  $u_0 = 2$ ,  $v_0 = 0$  et : 
$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

1. Calculer les quatre premiers termes de chaque suite.
2. On cherche  $\alpha$  tel que  $w_n = u_n + \alpha v_n$  soit geometrique.
  - a. Ecrire  $w_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et  $v_n$ .
  - b. Montrer que  $w_{n+1} = \lambda w_n$  si et seulement si  $\alpha$  est racine de  $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$ .
  - c. En deduire deux valeurs de  $\alpha$  et les raisons geometriques correspondantes.
3. Exprimer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 43 — Modele proie-predateur discret**

On note  $L_n$  la population de lapins et  $R_n$  celle de renards (en centaines) a l'annee  $n$  :

$$\begin{cases} L_{n+1} = 1,2 L_n - 0,4 R_n \\ R_{n+1} = 0,1 L_n + 0,8 R_n \end{cases} \quad L_0 = 10, \quad R_0 = 2.$$

1. Calculer  $L_1, R_1, L_2, R_2$ .
2. On pose  $P_n = L_n + R_n$  et  $Q_n = L_n - 2R_n$ .
  - a. Montrer que  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  sont geometriques ; preciser leurs raisons.
  - b. En deduire  $L_n$  et  $R_n$  en fonction de  $n$ .
3. Etudier le comportement a long terme des deux populations.
4. Ecrire un programme Python affichant  $L_n$  et  $R_n$  pour  $n = 0, \dots, 20$ .

**Exercice 44 — Systeme avec etat d'equilibre**

On definit  $u_0 = 5$ ,  $v_0 = 1$  et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n + 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n + 2 \end{cases}$$

1. Trouver le couple  $(\ell, m)$  verifiant le systeme a l'equilibre (poser  $u_{n+1} = u_n = \ell$  et  $v_{n+1} = v_n = m$ ).
2. Poser  $a_n = u_n - \ell$  et  $b_n = v_n - m$ . Ecrire le systeme homogene verifie par  $(a_n, b_n)$ .
3. Diagonaliser ce systeme (chercher  $s_n = a_n + \alpha b_n$  geometrique).
4. En deduire  $u_n$ ,  $v_n$  et leurs limites.

**Exercice 45 — Systeme triangulaire**

On definit  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 2$  et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

1. Exprimer directement  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Montrer que  $v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^n$ .
3. En deduire  $v_n$  par sommation :  $v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2 \times 3^k$ .
4. Calculer cette somme et exprimer  $v_n$ .
5. Verifier pour  $n = 3$ .

**Exercice 46 — Systeme et recurrence d'ordre 2**

Toute suite verifiant  $u_{n+2} = p u_{n+1} + q u_n$  se ramene a un systeme  $2 \times 2$  en posant  $v_n = u_{n+1}$ . Soit  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ .

1. Ecrire le systeme  $2 \times 2$  verifie par  $(u_n, v_n)$ .
2. Resoudre l'equation caracteristique  $r^2 = 3r - 2$  et noter  $r_1, r_2$  les racines.
3. Chercher  $\alpha$  tel que  $s_n = u_n + \alpha v_n$  soit geometrique de raison  $r_1$ , puis  $\beta$  tel que  $t_n = u_n + \beta v_n$  soit geometrique de raison  $r_2$ .
4. En deduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .
5. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{2^n}$ .

**Exercice 47 — Bac type (systeme et migration)**

**(7 points)** Une ville et sa banlieue comptent 500 000 habitants au total. Chaque annee, 5% des citadins partent en banlieue et 3% des banlieusards viennent en ville. On note  $V_n$  et  $B_n$  les populations en ville et en banlieue apres  $n$  ans, avec  $V_0 = 300\,000$ .

**Partie A****(2 pts)**

1. Ecrire le système de récurrence vérifié par  $(V_n, B_n)$ .
2. Montrer que  $V_n + B_n = 500\,000$  pour tout  $n$ .

**Partie B****(3 pts)**

3. Dédire que  $V_{n+1} = 0,92V_n + 15\,000$ .
4. Résoudre cette relation et exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
5. En déduire  $B_n$  et les limites des deux suites.

**Partie C****(2 pts)**

6. Interpréter la répartition à long terme.
7. Écrire un programme Python estimant le rang à partir duquel  $V_n < 200\,000$ .

**Exercice 48 — Bac type (chaîne de Markov à deux états)****(8 points)** On définit  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 0$  et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{cases}$$

**Partie A — Invariant****(2 pts)**

1. Montrer que  $u_n + v_n = 1$  pour tout  $n$ .
2. En déduire une relation de récurrence ne portant que sur  $u_n$ .

**Partie B — Résolution****(3 pts)**

3. Montrer que  $\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$  est géométrique.
4. En déduire  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .
5. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

**Partie C — Interprétation****(3 pts)**

6. Ce système modélise une chaîne de Markov à deux états. Identifier les probabilités de transition.
7. La distribution limite  $(\pi_1, \pi_2)$  vérifie  $\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$  et  $\pi_1 + \pi_2 = 1$ . Résoudre et comparer aux limites trouvées.
8. Écrire un programme Python simulant  $N = 50\,000$  itérations de cette chaîne et estimant la distribution empirique à long terme.

## Partie J — Techniques complementaires (selection)

**Exercice 49\*** — Changement de variable  $v_n = \frac{1}{u_n - a}$

Soit  $(u_n)$  definie par  $u_0 = -3$  et  $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$ . On pose  $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ .

1. Montrer que  $(v_n)$  est arithmetique de raison  $-\frac{1}{3}$ .
2. En deduire  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Determiner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
4. *Generalisation* : pourquoi ce changement de variable fonctionne-t-il? Quel lien avec les points fixes de  $f(x) = \frac{9}{6-x}$ ?

**Exercice 50\*** — Changement de variable  $v_n = \frac{1}{u_n}$

Soit  $(u_n)$  definie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$ . On pose  $v_n = \frac{1}{u_n}$ .

1. Montrer que  $(v_n)$  est arithmetique. Preciser la raison et le premier terme.
2. En deduire  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Determiner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
4. Ecrire un programme Python calculant les 20 premiers termes et verifier numeriquement la limite.

**Exercice 51\*** — Forme indeterminee et encadrement

Soit  $(u_n)$  definie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .

1. Peut-on determiner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  directement par les regles d'operations?
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ .
3. En deduire un encadrement de  $u_n$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
4. En deduire la limite de  $v_n = n u_n^2$ .

**Exercice 52\*** — Suite  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$

Soit  $(u_n)$  definie par  $u_0 = 0,5$  et  $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ .

1. Montrer par recurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 1$ .
2. Montrer que la suite est strictement decroissante.
3. En deduire que  $(u_n)$  converge. Determiner sa limite.

4. Comparer  $u_{n+1}$  et  $\frac{u_n}{2}$ . Montrer que  $0 < u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

### Exercice 53\* — Carrés emboites et serie geometrique

On part d'un carre de cote 3 cm. A chaque etape, on construit un carre dont le cote mesure la moitie du cote du carre precedent. On note  $A_n$  l'aire du  $n$ -ieme carre ( $n \geq 1$ ).

1. Calculer  $A_1$  et  $A_2$ .
2. Montrer que  $(A_n)$  est geometrique. Determiner sa raison et sa limite.
3. Exprimer  $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$  (aire totale des  $n$  premiers carres).
4. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ . Interpreter geometriquement.
5. *Variante* : si le cote est divise par  $r > 1$  a chaque etape, pour quelles valeurs de  $r$  la somme des aires converge-t-elle ?

### Exercice 54\* — Serie de Leibniz et approximation de $\pi$ (Python)

On definit  $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . On admet que  $(S_n)$  converge vers  $\frac{\pi}{4}$ .

1. Calculer  $S_0, S_1, S_2, S_3$ . Que remarque-t-on sur le signe de  $u_n$  ?
2. Completer le programme Python suivant qui calcule  $S_{100}$  et en deduit une approximation de  $\pi$  :

```

1 S = 0
2 for k in range(...):
3     S = S + ...
4 print("Approximation de pi :", ...)
```

3. Modifier le programme pour trouver le plus petit  $N$  tel que  $|4S_N - \pi| < 0,001$ . (*Utiliser `import math et math.pi`*)
4. *Remarque culturelle* : cette serie converge tres lentement. Combien de termes faut-il pour avoir 6 decimales exactes ?

### Exercice 55\* — Parts de marche (systeme reduit)

Deux fournisseurs d'electricite, Electic et Energo, se partagent le marche. En 2020, Electic detient 55 % des parts. Chaque annee, Electic perd 5 % de ses clients mais recupere 15 % des clients d'Energo. On note  $a_n$  la part d'Electic en 2020 +  $n$ .

1. Montrer que  $a_n + b_n = 1$  pour tout  $n$  (ou  $b_n$  est la part d'Energo).
2. Justifier que  $a_{n+1} = 0,95 a_n + 0,15 b_n$ .
3. En deduire que  $a_{n+1} = 0,8 a_n + 0,15$ .
4. Resoudre cette relation et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . Interpreter.

5. Montrer par recurrence que  $a_n \leq a_{n+1} \leq 0,75$  pour tout  $n$ .
6. Ecrire un programme Python determinant le pourcentage des parts d'Electic en 2030.

**Exercice 56\* — Bac type (abonnes papier/numerique, Bac 2016)**

**(6 points)** Un groupe de presse propose un magazine en version papier ou numerique. Chaque annee : 10 % des abonnes papier passent au numerique ; 6 % des abonnes numeriques repassent au papier. On note  $a_n$  la proportion d'abonnes papier et  $b_n$  celle des abonnes numeriques en  $2010 + n$ . On a  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 0$ .

**Partie A** **(2 pts)**

1. Justifier que  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$  et  $a_{n+1} = 0,9 a_n + 0,06 b_n$ .
2. En deduire que  $a_{n+1} = 0,84 a_n + 0,06$ .

**Partie B** **(3 pts)**

3. On pose  $c_n = a_n - 0,375$ .
  - a. Montrer que  $(c_n)$  est geometrique. Preciser raison et premier terme.
  - b. En deduire  $c_n$ , puis  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ . Interpreter.

**Partie C** **(1 pt)**

4. Determiner a partir de quelle annee la proportion d'abonnes numeriques depasse celle des abonnes papier.

**Exercice 57\* — Suites adjacentes (vers le superieur)**

On dit que deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont **adjacentes** si  $(u_n)$  est croissante,  $(v_n)$  est decroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ . On admet que deux suites adjacentes ont la meme limite.

Soient  $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$  pour  $n \geq 1$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  est croissante.
2. Montrer que  $(v_n)$  est decroissante. *Indication : montrer que  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$  pour  $n \geq 2$ .*
3. Montrer que  $v_n - u_n \rightarrow 0$ .
4. En deduire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes de meme limite  $\ell$ .
5. On admet que  $\ell = e$ . Pour  $n = 10$ , donner un encadrement de  $e$  a  $10^{-6}$  pres.

**Exercice 58\* — Bac type (recurrences d'ordre 2 et equation caracteristique)**

**(8 points)** Soit  $(u_n)$  definie par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$  et  $u_{n+2} = 4,5 u_{n+1} - 2 u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Partie A** **(2 pts)**

1. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .

2. On cherche les solutions de la forme  $u_n = r^n$ . Montrer que  $r$  doit verifier  $r^2 = 4,5r - 2$ . Resoudre cette equation ; on notera  $r_1 < r_2$  les deux racines.

**Partie B — Expression generale****(3 pts)**

3. On admet que  $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$  pour tout  $n$ . Determiner  $\lambda$  et  $\mu$  en utilisant  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 2$ .
4. En deduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .
5. Montrer que  $\frac{u_n}{r_2^n}$  converge et calculer sa limite.

**Partie C — Cas d'une racine double****(3 pts)**

6. Soit maintenant  $(w_n)$  definie par  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = 2$  et  $w_{n+2} = 10w_{n+1} - 25w_n$ . Resoudre  $r^2 = 10r - 25$  et noter  $r_0$  l'unique racine.
7. On admet que  $w_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$ . Determiner  $\lambda$  et  $\mu$ .
8. Determiner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .