

Chapitre 13

Calcul intégral

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Pour une fonction f positive croissante sur $[a; b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f ;
pour toute primitive F de f , relation $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- Intégration par parties.

Exemples d'algorithme — Programme officiel (BO)

- Méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes.
- Méthode de Monte-Carlo.
- Algorithme de Brouncker pour le calcul de $\ln 2$.

A) Intégrale et primitive

1) Intégrale d'une fonction positive

Définition 1

Soit f continue et positive sur $[a; b]$. L'**intégrale** de a à b de f est l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Théorème 1 (*Existence d'une primitive*)

Soit f continue et positive sur $[a; b]$. La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et $F' = f$. C'est la primitive de f qui s'annule en a .

Propriété 1

Si f est continue et négative sur $[a; b]$, l'aire du domaine est $\int_a^b -f(x) dx$.

Propriété 2

Si F est une primitive quelconque de f sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

2) Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Propriété 3

Soient f et g continues sur I , et $a, b, c \in I$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

— $\int_a^a f(x) dx = 0$

— $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

— **Relation de Chasles** : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

— **Linéarité** : $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

3) Signe de l'intégrale

Propriété 4

Pour $a \leq b$ et f continue sur $[a; b]$:

1. Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2. Si $f(x) \leq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

3. Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f dx \geq \int_a^b g dx$.

4) Intégration par parties

Théorème 2

Si u et v sont dérivables sur $[a; b]$ avec u' et v' continues :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

B) Applications du calcul intégral

1) Aire entre deux courbes

Propriété 5

Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$, l'aire du domaine compris entre les courbes de f et de g est :

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

2) Valeur moyenne d'une fonction

Propriété 6

La **valeur moyenne** de f continue sur $[a; b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Graphiquement, $\mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx$: l'aire du rectangle de hauteur μ égale l'aire sous la courbe.