

B) Équations avec logarithme et exponentielle

1) Équation de la forme $\ln(X) = a$

La solution unique est $X = e^a$.

2) Équation de la forme $e^X = a$

1. Si $a \leq 0$, il n'y a pas de solution.

2. Si $a > 0$, la solution est $X = \ln a$.

C) Étude de la fonction logarithme

1) Continuité et limites

Propriété 3

La fonction \ln est continue sur $]0; +\infty[$.

Propriété 4

Limites aux bornes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Croissances comparées : pour tout entier $k \geq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x = 0.$$

2) Dérivée de la fonction logarithme

Propriété 5

La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Si u est dérivable sur I et $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Chapitre 10

Primitives et équations différentielles

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

Exemples d'algorithme — Programme officiel (BO)

- Résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$, de $y' = ay + b$.

Définition 1

- Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y et ses dérivées successives.
- Une **solution** est toute fonction dérivable vérifiant cette égalité.

Définition 2

F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

1) Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Domaine	Primitive F
$f(x) = a$	\mathbf{R}	$F(x) = ax + c$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	\mathbf{R} si $n \in \mathbf{N}$; \mathbf{R}^* sinon	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$f(x) = e^x$	\mathbf{R}	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$ ou $] - \infty; 0[$	$F(x) = \ln x + c$

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

Propriété 1

Deux primitives d'une même fonction continue sur I diffèrent d'une constante.