

## D) Successions d'épreuves indépendantes

### Définition 8

L'univers d'une succession de  $n$  épreuves indépendantes d'univers  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  est  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ .

### Propriété 7

La probabilité d'une issue  $(x_1; \dots; x_n)$  est  $p(x_1) \times \dots \times p(x_n)$ .

## E) Loi et schéma de Bernoulli

### Définition 9

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience à deux issues : succès  $S$  et échec  $\bar{S}$ .

### Définition 10

La **loi de Bernoulli** de paramètre  $p$  est la loi de la variable  $X$  :

|              |         |     |
|--------------|---------|-----|
| $x_i$        | 0       | 1   |
| $P(X = x_i)$ | $1 - p$ | $p$ |

On note  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .

### Propriété 8

Pour  $X \sim \mathcal{B}(p)$  :  $E(X) = p$ ,  $V(X) = p(1 - p)$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$ .

### Définition 11

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

### Définition 12

La variable  $X$  comptant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  suit la **loi binomiale**  $\mathcal{B}(n; p)$ .

### Propriété 9

Pour  $X \sim \mathcal{B}(n; p)$  et  $k \in \{0, \dots, n\}$  :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

*Démonstration.* Un chemin réalisant  $k$  succès et  $n - k$  échecs a pour probabilité  $p^k (1 - p)^{n-k}$ . Le nombre de tels chemins est  $\binom{n}{k}$  (nombre de façons de placer  $k$  succès parmi  $n$  épreuves). Donc  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .  $\square$

### Propriété 10

Pour  $X \sim \mathcal{B}(n; p)$  :  $E(X) = np$ ,  $V(X) = np(1 - p)$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$ .

# Chapitre 9

## Fonction logarithme népérien

### Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

### Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
- Limite en 0 de  $x \mapsto x \ln x$ .

### Exemples d'algorithme — Programme officiel (BO)

- Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.

### Définition 1

La **fonction logarithme népérien**, notée  $\ln$ , est définie sur  $]0; +\infty[$  et associe à tout  $x > 0$  l'unique solution  $y$  de l'équation  $e^y = x$ .

### Propriété 1

Les courbes des fonctions exponentielle et  $\ln$  sont symétriques par rapport à la droite  $y = x$ .

## A) Propriétés algébriques

### Propriété 2

Pour tout  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $x \in \mathbf{R}$  :

1.  $\ln(e^x) = x$
2.  $e^{\ln x} = x$
3.  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
4.  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
5.  $\ln(a^n) = n \ln a$  pour  $n \in \mathbf{Z}$
6.  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$
7.  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

### Remarque 1

Valeurs particulières :  $\ln 1 = 0$  et  $\ln e = 1$ .