

$f(x) = k$  possède une **unique** solution dans  $[a; b]$ .

## D) Fonctions continues et suites convergentes

### Propriété 4

Si  $(u_n)$  est une suite à valeurs dans  $I$ , convergente vers  $\ell \in I$ , et  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ .

### Théorème 3 (*Théorème du point fixe*)

Soient  $f$  continue sur  $I$  dans lui-même et  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in I$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in I$ , alors  $\ell$  est solution de  $f(x) = x$ .

# Chapitre 7

## Orthogonalité, équations et distances dans l'espace

### Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
- Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
- Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples.
- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite ; reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
- Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point ; reconnaître un plan donné par une équation cartésienne.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan ou sur une droite.

### Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $M$ .
- Équation cartésienne du plan normal au vecteur  $\vec{n}$  et passant par le point  $A$ .

### A) Produit scalaire dans l'espace

#### Définition 1

Soient  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  deux vecteurs de l'espace. Les points  $A, B, C$  déterminent un plan  $\mathcal{P}$ . Le **produit scalaire**  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  dans ce plan.

#### Propriété 1

Soient  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  deux vecteurs non nuls.

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
2. Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ .

#### Définition 2

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

### 1) Opérations avec le produit scalaire

#### Propriété 2

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2.  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

3.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4.  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
5.  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
6.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
7.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

## B) Produit scalaire dans un repère

### Définition 3

Une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est **orthonormée** si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. Un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est **orthonormé** si sa base l'est.

### Propriété 3

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ .

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
2.  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3.  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

## C) Orthogonalité dans l'espace

### 1) Orthogonalité de deux droites

#### Définition 4

Deux droites sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

#### Propriété 4

$(d_1)$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  et  $(d_2)$  de vecteur directeur  $\vec{v}$  sont orthogonales si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

### 2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

#### Définition 5

Une droite est **orthogonale** à un plan si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

#### Propriété 5

$(d)$  de vecteur directeur  $\vec{w}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$  dirigé par  $(\vec{u}, \vec{v})$  si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .

### 3) Équation cartésienne d'un plan

#### Définition 6

Un **vecteur normal** au plan  $\mathcal{P}$  est tout vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs directeurs de  $\mathcal{P}$ .

#### Propriété 6

L'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est le plan passant par  $A$  de vecteur normal  $\vec{n}$ .