$\lim\limits_{x\to\alpha} f$	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g$	$\ell_2 \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	***F.I.***

Exemple 3

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-4x+1}$ *: on divise numérateur et dénominateur par* x^2 *(terme de plus haut degré) :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{1-0+0} = 1.$$

D) Composition de limites

Théorème 1

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *et* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$*, alors* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Exemple 4

Soit $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = \sqrt{x}$. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ *et* $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = 2$*, donc* $\lim\limits_{x\to 2} g(f(x)) = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2} = 2$.

E) Théorèmes de comparaison

Théorème 2 (*Théorème de comparaison*)

1. *Si pour* x *suffisamment grand* $f(x) \leq g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*, alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
2. *Si pour* x *suffisamment grand* $f(x) \leq g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$*, alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 3 (*Théorème d'encadrement*)

Si pour x *suffisamment grand* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$*, alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Théorème 4 (*Croissances comparées*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Chapitre 5

Dérivation et convexité

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.
- Lire sur une représentation graphique les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion ; dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Si f'' est positive sur I, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

A) Compléments sur les dérivées

1) Dérivée d'une fonction composée

Définition 1

*Soient u définie sur I à valeurs dans J et v définie sur J. La **composée** $v \circ u$ est définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.*

Propriété 1

Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0)).$$

Propriété 2

1. *Si u est dérivable sur I, la fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable et $f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$.*
2. *Si u est dérivable sur I à valeurs dans $]0; +\infty[$, la fonction $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.*

Remarque 1

En général $u \circ v \neq v \circ u$. Par exemple avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x + 1$: $u(v(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ mais $v(u(x)) = x^2 + 1$.