Propriété 14

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x_M; y_M; z_M)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x_M\overrightarrow{i} + y_M\overrightarrow{j} + z_M\overrightarrow{k}$; ce triplet est appelé les ***coordonnées*** *de M.*

3) Coordonnées d'un vecteur

Propriété 15

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Propriété 16

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff$ *leurs coordonnées sont égales composante par composante.*

Propriété 17

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, les coordonnées du milieu I de $[AB]$ sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Opérations sur les coordonnées de vecteurs

Propriété 18

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{pmatrix}$
2. $\lambda\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \\ \lambda z_u \end{pmatrix}$

4) Représentation paramétrique d'une droite

Propriété 19

Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Chapitre 4

Limites de fonctions

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

— Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
— Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

— Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$.

A) Limite d'une fonction en l'infini

Définition 1

Une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Définition 2

Une fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Définition 3

Une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. La droite $y=\ell$ est une ***asymptote horizontale*** *à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.*

Exemple 1

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x} = 2$ *car* $\dfrac{2x+1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. *La droite $y=2$ est une asymptote horizontale.*

B) Limite d'une fonction en un réel

Définition 4

Une fonction f a pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Définition 5

Une fonction f a pour limite ℓ en a si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Définition 6

La droite $x = a$ est une ***asymptote verticale*** *à $\mathcal{C}_f$ si au moins une des limites $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ est infinie.*

Définition 7

1. *On dit que f admet une* ***limite à gauche*** *de a, notée $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, lorsque f admet une limite quand $x \to a$ avec $x < a$.*
2. *On dit que f admet une* ***limite à droite*** *de a, notée $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, lorsque f admet une limite quand $x \to a$ avec $x > a$.*

Exemple 2

Pour $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$:

1. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$
3. *La droite $x = 2$ est une asymptote verticale.*

C) Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

Propriété 1

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f+g)(x)$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***F.I.***

2) Limite d'un produit

Propriété 2

$\lim\limits_{x\to\alpha} f$	ℓ_1	$\ell_1>0$	$\ell_1>0$	$\ell_1<0$	$\ell_1<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f\times g)$	$\ell_1\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	***F.I.***

3) Limite d'un quotient

Propriété 3