Pseudo-code

```
Entrer epsilon
Entrer la limite supposée l
n <- 0
Tant que |u(n) - l| >= epsilon
    n <- n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

Python (NumWorks ou PC)

```
def seuil(epsilon, l):
    n = 1
    u = 1/n   # exemple avec u_n = 1/n
    while abs(u - l) >= epsilon:
        n += 1
        u = 1/n
    return n

print(seuil(0.001, 0))  # renvoie 1000
```

Chapitre 3

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.
- Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
- Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

A) Vecteurs de l'espace

Définition 1

Soient A et B deux points de l'espace. La transformation qui à tout point de l'espace associe l'unique point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme est la **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$. *On note* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$; *on dit que* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{MM'}$ *sont des* **représentants** *de* $\overrightarrow{u}$.

Théorème 1

Soient un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un point A de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$; on dit que $\overrightarrow{AM}$ est le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A.

1) Opérations sur les vecteurs

Propriété 1

Soient A, B et C trois points. On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

Propriété 2

Soient A, B et C trois points. On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

Propriété 3

Soient A, B des points distincts et $k \in \mathbf{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ est défini par :
- *Si $k \geq 0$ alors $C \in [AB]$ et $AC = kAB$.*
- *Si $k \leq 0$ alors $C \in (AB)$ et $C \notin [AB]$, avec $AC = |k|AB$.*

Propriété 4

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et k, k' deux réels.
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *si et seulement si* $k = 0$ *ou* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$

B) Droites et plans de l'espace

Définition 2

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ***colinéaires*** *s'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.*

Propriété 5

Trois points A, B et C deux à deux distincts sont ***alignés*** *si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

Propriété 6

1. *Par deux points distincts, il passe une unique droite.*
2. *Par trois points non alignés A, B et C, il passe un unique plan (ABC).*
3. *Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{P}$.*
4. *Dans chaque plan de l'espace, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent.*

Définition 3

Des vecteurs sont ***coplanaires*** *si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.*

Définition 4

Soient A et B deux points de l'espace.
- La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbf{R}$.
- $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de (AB).

Propriété 7

Une droite (d) est définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$; on la note $d(A; \overrightarrow{u})$.

Définition 5

Soient A, B et C trois points de l'espace non alignés.
- Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec $x, y \in \mathbf{R}$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC).

Propriété 8

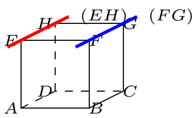
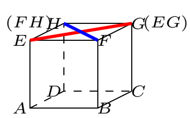
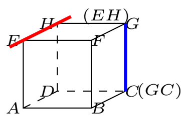
Un plan $\mathcal{P}$ est défini par un point A et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$; on le note $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

C) Positions relatives de droites et de plans

1) Position de deux droites

Propriété 9

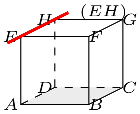
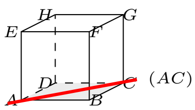
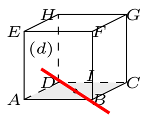
Deux droites (d) et (d') peuvent être coplanaires ou non coplanaires.

(d) et (d') sont coplanaires		(d) et (d') sont non coplanaires
		
(EH) et (FG) parallèles	(EG) et (FH) sécantes	(EH) et (GC) non coplanaires

2) Position d'une droite et d'un plan

Propriété 10

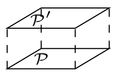
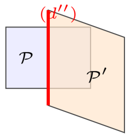
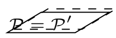
Soit (d) une droite et $\mathcal{P}$ un plan. Il existe trois positions relatives :

(d) *strictement parallèle à* $\mathcal{P}$	(d) *incluse dans* $\mathcal{P}$	(d) *sécante à* $\mathcal{P}$
 $(EH) \parallel \mathcal{P}$	 (AC) *incluse dans* $\mathcal{P}$	 (d) *sécante à* $\mathcal{P}$

3) Position de deux plans

Propriété 11

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans. Il existe trois configurations possibles :

Plans parallèles	*Plans sécants*	*Plans confondus*
		

Théorème 2

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ contiennent respectivement deux droites (d) et (d') parallèles entre elles, alors leur intersection (d'') est parallèle à (d) et (d').

Démonstration. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur commun à (d) et (d') (car elles sont parallèles). Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de $(d'') = (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}')$. Comme (d'') est contenue dans $\mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et d'un vecteur directeur de (d). De même, $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire dans $\mathcal{P}'$. Si $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v}$ n'étaient pas colinéaires, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ formerait une base commune à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, ce qui impliquerait $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, contradisant le fait qu'ils soient sécants. Donc $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, et (d'') est parallèle à (d) et (d'). □

Théorème 3

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, alors tout plan Π qui coupe $\mathcal{P}$ coupe aussi $\mathcal{P}'$, et les intersections sont deux droites parallèles.

D) Repère de l'espace

1) Base de l'espace

Définition 6

Trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ forment une **base de l'espace** *si et seulement si aucun d'eux n'est combinaison linéaire des deux autres.*

Propriété 12

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit de façon unique $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans cette base.

2) Repère de l'espace

Propriété 13

Un **repère de l'espace** *est un quadruplet $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où O est l'origine et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de l'espace.*